STATIQUE EXPÉRIMENTALE ET THÉORIQUE

DES LIQUIDES

SOUMIS AUX SEULES FORCES MOLÉCULAIRES.

Gand, imp. C. Annoot-Braeckman.

STATIQUE

EXPÉRIMENTALE ET THÉORIQUE

DES LIQUIDES

SOUMIS

AUX SEULES FORCES MOLÉCULAIRES,

PAR

J. PLATEAU,

Professeur à l'Université de Gand,
Membre de l'Académie Royale de Belgique, Correspondant de l'Institut de France,
de la Société Royale de Londres, de l'Académie de Berlin, etc.

TOME SECOND.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS,
quai des Augustins, 55.

LONDRES,
TRÜBNER ET Cie,
Ludgate Hill, 57 et 59.

GAND ET LEIPZIG : F. CLEMM.

1873.

STATIQUE DES LIQUIDES

SOUMIS

AUX SEULES FORCES MOLÉCULAIRES.

CHAPITRE VII.

Recherche des causes principales d'où dépendent le facile développement et la persistance des lames liquides : Viscosité superficielle; influence du rapport entre cette viscosité et la tension.

§ 241. Si tous les liquides peuvent se développer en lames minces, ils présentent néanmoins, quant à la facilité de ce développement et quant à la persistance des lames engendrées, des différences considérables : on gonfle aisément, par exemple, de grosses bulles à l'orifice d'une pipe avec de l'eau de savon, et personne ne s'aviserait d'essayer avec de l'eau pure ; les lames transversales dans un flacon persistent un temps énorme si le liquide employé est du liquide glycérique, et elles éclatent presque immédiatement si c'est de l'eau (§ 229).

On attribue généralement à la viscosité l'extension aisée de l'eau de savon et de quelques autres liquides en lames minces de grande étendue ; je ferai voir que la viscosité, du moins telle qu'on l'entend, ne joue qu'un rôle minime dans cette facilité d'extension, et je tâcherai d'arriver à la véritable cause du phénomène.

§ 242. M. Gladstone est, je pense, le seul qui se soit occupé un peu sérieusement de la question. Ce savant a publié, en 1857, une Note(1) sur la mousse qui se forme, par l'agitation ou autrement, à la surface de certains liquides ; je vais en traduire les passages qui se rapportent à notre sujet :

« Tous les liquides, » dit M. Gladstone, « lorsqu'on les secoue avec de l'air, forment des bulles ; mais, sur les uns, ces bulles éclatent et s'évanouissent dès que l'agitation cesse, tandis que, sur d'autres, se montre une mousse plus ou moins permanente. Cette différence entre les liquides paraît tenir à un caractère spécifique, et l'on ne peut, jusqu'ici, la faire dépendre d'aucune autre qualité.

« En règle générale, les solutions aqueuses de corps organiques sont les plus propres à donner de la mousse....

« Les solutions des acétates sont particulièrement disposées à la production d'une mousse persistante; elles possèdent cette propriété à un tel degré, que j'ai pu quelquefois, parmi différents mélanges de solutions salines, reconnaître par ce moyen ceux qui contenaient un acétate. L'acétate de fer est au premier rang ; mais les acétates de cuivre, de plomb et d'autres métaux présentent la même propriété d'une manière très-prononcée. Cependant l'acide acétique lui-même ne montre aucune disposition à la formation de la mousse. Les bulles développées par l'agitation de l'alcool ou de l'éther disparaissent instantanément.... Le citrate de fer est analogue à l'acétate.

« Cette faculté de mousser est complétement indépen-

(1) *Note on froth* (PHILOS. MAGAZ., 4me série, vol. XIV, p. 314).

dante de la densité : une solution dense d'acide sulfindigotique mousse par l'agitation, mais une solution de chlorure d'ammonium d'une grande densité ne produit aucune mousse durable, tandis que, d'un autre côté, une faible solution de savon, qui diffère peu de l'eau distillée, donne lieu, comme chacun le sait, à une mousse très-persistante. »

Dans cette Note, on le voit, il s'agit surtout de la mousse ; mais, nous le savons, celle-ci n'est qu'un assemblage de lames, et il paraît naturel d'admettre qu'un liquide qui se recouvre, par l'agitation, d'une mousse abondante et persistante, doit se laisser gonfler aisément en bulles à l'orifice d'une pipe ou d'un tube. C'est là, en effet, le cas général, et l'eau de savon nous en offre un exemple familier. J'ai cependant rencontré, à cet égard, de curieuses exceptions ; je les ferai connaître plus loin.

M. Gladstone signalant l'acétate de fer comme remarquable au point de vue de la mousse, je me suis procuré une solution concentrée et aussi neutre que possible d'acétate de peroxyde de fer; elle moussait très-bien, et l'on a pu effectivement en gonfler sans peine, à l'orifice d'une pipe, des bulles de cinq et même quelquefois de six centimètres de diamètre.

Ce qu'il nous importe surtout de remarquer, c'est que M. Gladstone déclare ne pouvoir faire dépendre la faculté de mousser d'aucune propriété connue des liquides, et qu'il regarde conséquemment les différences de viscosité et de cohésion comme insuffisantes pour rendre raison de la diversité que présentent les liquides à cet égard.

§ 243. Reprenons la question où il l'a laissée, et essayons de la poursuivre.

Tandis que la cohésion s'oppose à la rupture des lames, la tension constitue, au contraire, une force qui agit sans cesse pour provoquer cette rupture. Mais la tension est nécessairement inférieure à la cohésion des couches superficielles, sans quoi il est évident que la réalisation des lames serait tout à fait impossible.

En second lieu, puisque la tension est indépendante de l'épaisseur (§ 161), il s'ensuit qu'une lame n'a, par elle-même, pas plus de tendance à se rompre lorsqu'elle est mince que l'orsqu'elle est épaisse.

Cette déduction semble, au premier aperçu, s'accorder mal avec l'observation; en effet, on voit ordinairement les lames diminuer beaucoup d'épaisseur avant de crever : quand on gonfle une bulle de savon, elle atteint souvent de grandes dimensions, et n'éclate conséquemment que lorsque la lame est devenue très-mince; si l'on dépose sur la surface de l'eau de savon une bulle de ce liquide, bulle qui se transforme aussitôt en calotte sphérique, la teinte du sommet de celle-ci peut aller, on le sait, jusqu'au noir intense, ce qui correspond à une épaisseur d'environ $0,^{mm}00001$, etc.

Cependant examinons la chose de plus près. Les bulles de savon et les calottes du même liquide éclatent fréquemment aussi avant que les lames qui les constituent se soient beaucoup atténuées; quand une grosse bulle formée d'un bon liquide glycérique est déposée sur un anneau, la lame va d'abord en s'amincissant, puis reprend (§ 108) une épaisseur croissante, et c'est seulement lorsque celle-ci approche de nouveau de sa valeur originaire, que la bulle se brise; on peut réaliser des lames d'eau pure de différentes manières : par exemple en calottes sphériques à la surface du liquide par l'ascension de bulles d'air, sous la forme plane en travers d'un flacon, etc.; or, sauf de rares exceptions, ces lames d'eau demeurent parfaitement incolores jusqu'à leur disparition, d'où il suit qu'elles se rompent lorsqu'elles ont encore, comme lames, une épaisseur considérable. Nous verrons d'ailleurs que beaucoup d'autres liquides sont dans le même cas.

Si donc les lames paraissent plus disposées à éclater lorsqu'elles sont plus ténues, c'est qu'alors probablement elles résistent moins à des causes extérieures telles que de petits ébranlements, etc.; nous avons vu, en effet (§ 229), qu'une grande lame de liquide glycérique soustraite, autant que possible, à ces causes extérieures et devenue noire dans toute son étendue, a persisté, avec cette excessive minceur, pendant un grand nombre de jours.

§ 244. Comme j'aurai à comparer les lames d'un grand nombre de liquides, je vais décrire les procédés que j'ai employés pour leur production et leur observation.

Les lames formées d'un même liquide et dans les mêmes circonstances persistent, en général, d'autant plus qu'elles ont moins d'étendue; or, pour la très-grande majorité des liquides, les lames de dimensions un peu considérables éclatent presque à l'instant de leur développement; il fallait donc se borner à de petites lames. J'ai choisi les calottes produites à la surface des liquides par l'ascension de bulles d'air, et l'on n'a porté son attention que sur celles dont la base avait 10^{mm} à 12^{mm} de diamètre. Voici le procédé qui m'a le mieux réussi :

On pose au fond d'un bocal en verre un petit vase en porcelaine ou en verre, dont le bord a environ quatre centimètres de diamètre, on le remplit, jusqu'un peu au-dessus de ce bord, du liquide à essayer, puis on y introduit l'extrémité inférieure d'un tube de verre façonné comme je vais le dire : celui qui a servi à mes expériences a 5^{mm} de diamètre intérieur; son extrêmite inférieure, repliée à angle droit sur une très-petite longueur, va en se rétrécissant, et son orifice n'a que $2^{mm},5$; une portion courte en caoutchouc relie l'autre extrémité à un second tube de verre, qui peut ainsi prendre toutes les directions, et auquel on applique la bouche. Cette disposition permet à l'expérimentateur de se placer commodément : il tient la portion en caoutchouc appuyée sur le bord du goulot du bocal, et il donne au tube de verre extérieur une direction obliquement descendante; ce dernier tube est d'ailleurs replié, vers son extrémité libre, sous un angle obtus, afin d'aboutir horizontalement à la bouche; là il est fermé par un tampon de papier à filtre qui serre assez pour ne laisser entrer l'air qu'en petite quantité et rendre l'insufflation aussi modérée qu'on le veut; ajoutons que la profondeur la plus convenable de l'orifice inférieur au-dessous de la surface du liquide, dépend de la nature de celui-ci; l'expérimentateur trouve aisément de lui-même ces petites modifications, et il acquiert bientôt l'habitude de produire à peu près à volonté des calottes du diamètre requis.

Quand un liquide fournit des calottes d'une persistance suffisante, celles-ci tendent à aller s'attacher au tube; pour les en empêcher, il faut, dès que l'une d'elles est formée, soulever doucement le tube hors du liquide; comme la calotte ne peut d'ailleurs aller se heurter contre le bord du petit vase à cause de la légère convexité qu'y présente le liquide, elle reste vers le milieu de la surface de ce dernier, et conséquemment dans les conditions les plus favorables; en effet, elle est alors entièrement libre, et la paroi du bocal la protége contre les petites agitations de l'air ambiant, et contre l'haleine de l'expérimentateur quand celui-ci observe de près.

Enfin la plupart des liquides exigent d'autres précautions encore, si l'on veut soustraire leurs calottes à toute influence étrangère. L'une de ces influences est l'évaporation, quand il s'agit de liquides plus ou moins volatils. Pour l'écarter, on commence par verser dans le bocal une petite couche du liquide à essayer, ou simplement d'eau si le liquide à essayer ne fournit que de la vapeur d'eau ; puis on applique contre la paroi intérieure, depuis le fond jusqu'au haut, à droite et à gauche de la direction par où doit passer la lumière, de larges bandes de papier à filtre imprégnées du même liquide; ou bien, si ce liquide est caustique, on le promène sur toute la paroi intérieure pour qu'elle en soit mouillée ; on descend alors le petit vase vide au fond du bocal, et l'on ferme celui-ci avec une plaque de caoutchouc fortement serrée au goulot et percée de deux trous ; par l'un de ces trous passe, à frottement, le tube servant à l'insufflation ; par l'autre on introduit le col d'un petit entonnoir, col qui doit être assez long pour atteindre à peu près l'orifice du petit vase, et l'on ferme, par l'extérieur, cet entonnoir avec un petit bouchon de liége. Cela fait, on abandonne l'appareil pendant un temps qu'on juge suffisant pour que l'atmosphère intérieure soit à peu près saturée de vapeur. Après ce temps, qui, dans mes expériences, était au moins de deux heures, on débouche l'entonnoir, et, par son canal, on remplit le petit vase, puis on replace le bouchon, et l'on procède immédiatement aux essais.

Avec les liquides très-volatils, tels que l'alcool, l'éther sulfurique, etc., ces précautions mêmes sont insuffisantes, à cause, sans doute, de la difficulté de saturer complétement l'atmosphère du bocal. Dans ce cas, on produit les calottes en secouant simplement le liquide dans un flacon abandonné préalablement pendant plusieurs heures après avoir été fortement agité. Mais si ce dernier procédé permet d'opérer dans une atmosphère aussi saturée que possible, il présente des inconvénients qui doivent le faire rejeter toutes les fois qu'on le peut : le liquide est en mouvement lors de l'apparition des calottes, ce qui rend l'observation difficile, et, si les calottes n'ont pas une très-courte persistance, elles vont souvent s'attacher à la paroi, où elles se déforment plus ou moins.

Certains liquides non volatils, tels que la glycérine, l'acide sulfurique, etc., absorbent l'humidité de l'air, ce qui constitue une autre influence étrangère. Pour s'en garantir, on introduit au fond du bocal une substance qui elle-même absorbe l'humidité, telle que du chlorure de calcium ou de l'acide sulfurique, tout le reste étant disposé comme précédemment. Après un temps regardé comme suffisant pour que l'atmosphère du bocal soit desséchée, on remplit le petit vase, et l'on opère aussitôt.

§ 245. Mes expériences, effectuées avec toutes les précautions que je viens de décrire, m'ont conduit à partager les liquides, au point de vue de leurs lames, en trois catégories principales.

Les liquides qui composent la première, présentent les caractères suivants : fortement agités dans un flacon, ils ne produisent jamais de mousse très-abondante, plusieurs même n'en donnent pas du tout; ils ne se laissent point gonfler en bulles à l'orifice d'une pipe, ou si l'on obtient quelquefois des bulles, elles dépassent à peine l'orifice en diamètre; leurs calottes n'ont qu'une durée assez courte, durée très-variable pour chaque liquide, et très-différente, quant à son maximum, d'un liquide à un autre, mais ne dépassant jamais un petit nombre de minutes ; pour plusieurs de ces liquides, toutes les calottes demeurent incolores jusqu'à leur rupture; pour d'autres, la plupart restent également blanches, mais un nombre relativement petit montrent, après un intervalle plus ou moins long, un faible commencement de coloration. Celui-ci consiste ordinairement dans l'apparition, au sommet de la calotte, d'un système exigu d'anneaux rouges et verts, qui n'excède pas $1^{mm},5$ en diamètre; ce système se développe en un temps très-court, puis conserve la même dimension minime jusqu'à ce que la calotte éclate; quelquefois, en outre, les calottes les plus durables finissent par se revêtir, sur tout le reste de leur surface, d'un moiré pâle rose et vert; pour certains liquides, ce moiré se manifeste seul, c'est-à-dire sans qu'il y ait eu préalablement formation des petits anneaux. Enfin, chose bien singulière, les liquides aqueux chez lesquels on observe, dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau, ces phénomènes de couleurs naissantes, n'en laissent plus voir aucune trace lorsqu'ils sont placés dans une atmosphère desséchée, et qu'ainsi leur évaporation, au lieu d'être supprimée, est au contraire activée.

En résumé donc, les caractères généraux de cette première catégorie sont : peu ou point de mousse, impossibilité de gonfler des bulles, courte durée des lames, absence de couleurs sur les calottes ou coloration tardive, seulement naissante, et n'offrant, quand elle s'étend sur toute la lame, que le rouge et le vert des derniers ordres.

Parmi les nombreux liquides qui se rangent dans la catégorie dont il s'agit, je citerai l'eau, la glycérine, les acides sulfurique et azotique, l'ammoniaque, des solutions saturées d'acide tartrique, d'azotate de potasse, de carbonate de soude et de chlorure de calcium.

Les liquides de la deuxième catégorie, comme les précédents, développent peu de mousse ou n'en développent aucune, et ne se laissent pas gonfler en bulles à l'orifice d'une pipe; leurs calottes ont, en général, des durées beaucoup plus courtes encore; mais, pour un même liquide, toutes les calottes, ou au moins une partie d'entre elles, se revêtent, à l'instant de leur formation ou très-peu de temps après, de teintes prononcées des différents ordres sur toute leur surface; ces teintes peuvent se disposer en anneaux horizontaux, et alors, pour certains liquides et dans certaines conditions, elles indiquent que l'épaisseur de la lame va en croissant de la base au sommet de la calotte. Ajoutons que, par suite du peu de persistance, il faut souvent l'habitude que donne la répétition multipliée de semblables expériences pour bien juger des teintes et de leur arrangement.

Ainsi, d'une manière générale, les liquides en question se distinguent de ceux de la catégorie précédente par une coloration des lames prompte, prononcée, et montrant les teintes de tous les ordres.

Les liquides de cette deuxième catégorie sont : les huiles grasses, l'acide lactique, l'acide acétique cristallisable, l'essence de térébenthine, l'alcool, la benzine, la liqueur des Hollandais, le chloroforme, l'éther sulfurique, le sulfure de carbone, et sans doute un grand nombre d'autres.

Les liquides qui appartiennent à la troisième catégorie se recouvrent, par l'agitation, d'une mousse volumineuse et très-persistante; on les gonfle aisément en bulles à l'orifice d'une pipe; leurs calottes se maintiennent beaucoup plus longtemps que celles des deux catégories précédentes, ordinairement plusieurs heures, quelquefois même plusieurs jours; elles ont d'abord, en général, une phase incolore très-notable, dont la durée diffère beaucoup d'un liquide à un autre, puis se teintent graduellement, mais d'une manière qui varie un peu avec les liquides.

Ces liquides sont peu nombreux ; ils se réduisent, je pense, aux solutions des différents savons, à la solution de saponine et à celle d'albumine ; on peut y joindre la solution d'acétate de peroxyde de fer. Je ne parle pas de la solution d'oléate de soude, parce qu'elle doit se placer avec celles des savons, ni du liquide glycérique, dont la propriété de s'étendre aisément en grosses bulles résulte du savon ou de l'oléate de soude qu'il renferme, ni de la décoction de bois de Panama, qui contient de la saponine, ni de quelques autres liquides encore dans la composition desquels entre une substance albuminoïde.

Certaines substances solides à la température ordinaire, mais que la chaleur rend liquides, possèdent aussi, sous ce dernier état, la propriété de donner sans peine des bulles de grand diamètre : telles sont le verre, et un mélange de colophane avec de l'huile de lin, comme l'a indiqué M. Böttger[1].

Enfin, on le comprend, les trois catégories ci-dessus ne sont pas tellement tranchées qu'il n'y ait certains liquides formant pour ainsi dire passage de l'une d'elles à une autre : je citerai comme exemples une solution d'une partie de gomme arabique dans dix parties d'eau, qui participe à la fois de la première et de la troisième catégorie, et une solution convenable de colophane dans l'huile d'olive, qui participe de la deuxième et de la troisième.

§ 246. Avant d'aller plus loin, je vais exposer avec quelques détails les faits particuliers relatifs aux calottes de chacun des liquides que j'ai soumis à l'expérience[2].

(1) *Beiträge zur Physik und Chemie.* Frankfurt a. M., 1838, p. 13.

(2) Ainsi que je l'ai su depuis, Fusinieri avait fait, en grande partie, ces mêmes expériences (§ 324), mais dans un but tout différent, et pour en tirer des conclusions d'une tout autre nature que les miennes.

Les substances employées étaient, à peu d'exceptions près, telles qu'on les trouve dans le commerce ; il eût été inutile pour l'objet de mon travail de chercher à les avoir chimiquement pures. Commençons par la première catégorie.

Eau distillée. 1° Dans une atmosphère saturée de sa vapeur. Sur cent calottes successives, quatre-vingt-trois, dont les durées ont varié d'une fraction de seconde à 7″, sont demeurées incolores jusqu'à leur rupture; seize ont montré, après des phases incolores respectives de 1″ à 6″, le système de petits anneaux rouges et verts ; parmi ces dernières, les deux qui ont eu les plus longues durées, savoir 11″ et 13″, ont fini par se recouvrir du moiré pâle rouge et vert ; dans celle de 11″, le rouge et le vert des petits anneaux ont peu à peu fait place à d'autres teintes; enfin une calotte, dont la durée a été de 10″, a présenté, en approchant de sa rupture, le moiré pâle sans petits anneaux.

2° Dans une atmosphère desséchée au moyen de l'acide sulfurique. Cent calottes, dont les durées ont varié d'une fraction de seconde à 12″, sont restées complétement blanches.

Glycérine de Price, dans une atmosphère desséchée. Cent calottes produites à la manière ordinaire, toutes demeurant incolores, mais ne persistant au maximum que 2″. On en obtient de plus durables en en formant rapidement les unes sous les autres plusieurs petites, qui se confondent en une seule à laquelle on donne sans peine le diamètre requis ; quarante calottes ont été engendrées par ce procédé, et, sur l'une d'elles qui a persisté 80″, on a distingué, après 46″, le petit système d'anneaux.

Acide sulfurique, dans une atmosphère desséchée. Cent calottes d'une fraction de seconde à 28″, dont six, de 3″ à 8″, offrent, après des intervalles de 2″ à 5″, le petit système d'anneaux; dans l'une de celles-ci, les petits anneaux ont fini par devenir pourpres et bleus.

Acide azotique, dans une atmosphère saturée de sa vapeur. Cent calottes d'une fraction de seconde à 1″, toutes demeurant incolores.

Ammoniaque, dans une atmosphère saturée de sa vapeur. Cent calottes d'une fraction de seconde à 4″, toutes demeurant incolores.

Solution saturée d'acide tartrique, dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau. Quatre-vingt-dix calottes d'une fraction de seconde à 142″, toutes demeurant incolores.

Solution saturée d'azotate de potasse(1), dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau. Cent calottes d'une fraction de seconde à 6″, toutes demeurant incolores.

Solution saturée de carbonate de soude(2). 1° Dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau. Cent calottes d'une fraction de seconde à 26″, dont cinq avec le petit système d'anneaux après les intervalles de 3″ à 9″.

2° Dans une atmosphère desséchée par du chlorure de calcium. Cent calottes d'une fraction de seconde à 30″, une de 58″, toutes demeurant incolores.

Solution saturée de chlorure de calcium. Comme ce liquide ne tendait probablement ni à émettre, ni à absorber de vapeur aqueuse, on l'essaie en laissant le bocal ouvert. Soixante-dix calottes de 1″ à 229″, dont cinq de 116″ à 229″, ont montré, après des intervalles de 100″ à 150″, le moiré pâle rose et vert, sans le petit système d'anneaux; les durées de celles qui sont demeurées incolores, ont été de 1″ à 148″.

(1) Le sel avait été purifié par une seconde cristallisation.

(2) Même observation.

Je dois dire ici que, pour quelques-uns de ces liquides, pour l'acide sulfurique, par exemple, les calottes beaucoup moindres, comme de 3^{mm} à 4^{mm}, persistant souvent beaucoup plus longtemps, finissent par se colorer.

§ 247. Agissons de même à l'égard de la deuxième catégorie.

Huile d'olive, dans le bocal ouvert. Les calottes persistent, au maximum, 0'',7; toutes, après un intervalle si court que l'existence en est douteuse, manifestent des couleurs : on voit descendre jusqu'à la base, et très-rapidement, des anneaux rouges et verts suivis d'anneaux bleus et pourpres, puis d'un anneau orangé, puis d'un jaune, lequel laisse dans son intérieur un espace blanc; cet espace se fonce, devient d'un gris bleuâtre, et envahit presque toute la calotte; enfin le sommet s'assombrit encore, et la calotte éclate. Les teintes sont donc rangées de manière à indiquer une épaisseur décroissante de la base au sommet des calottes, disposition que nous nommerons directe.

Huile d'amande douce, dans le bocal ouvert. Durée maxima 0'',2; phénomènes analogues, mais plus difficiles à observer, à cause du peu de persistance; on peut cependant s'assurer que les teintes sont également directes.

Acide lactique. Ce liquide absorbant l'humidité de l'air, on l'essaie dans une atmosphère desséchée par du chlorure de calcium. Durée de 1'' à 18''; après un intervalle très-court, mais appréciable, phénomènes analogues à ceux de l'huile d'olive; seulement le temps de la descente des anneaux est de 1'' à 2'', après quoi la calotte entière est blanche, puis passe au gris légèrement bleuâtre en commençant par le sommet, etc.; les teintes ont donc encore la disposition directe.

Le même liquide essayé dans le bocal ouvert, n'a donné que des calottes de 0″,6 au maximum, et toutes ont montré les teintes dans la disposition inverse (1), d'où il suit que, dans ces calottes, l'épaisseur allait en croissant de la base au sommet.

Acide acétique cristallisable. 1° Dans une atmosphère saturée de sa vapeur, procédé des secousses dans un flacon. Durée maxima 0″,8; toutes les calottes, après une phase blanche très-courte, se montrent colorées, la plupart en anneaux horizontaux, et offrant les teintes directes.

2° Dans le bocal ouvert. Durée d'une fraction de seconde à 2′; phase incolore extrêmement courte, puis subitement teintes inverses nettement accusées, depuis le blanc du premier ordre à la base, jusqu'au rouge et au vert des derniers ordres au sommet; ces teintes persistent sans se modifier, et sans descendre ni monter; seulement les anneaux supérieurs éprouvent des trépidations.

Essence de térébenthine. 1° Procédé des secousses dans un flacon. Durée d'une fraction de seconde à 6″; toutes les calottes sont colorées dès leur formation, et, dans presque toutes celles où la disposition est régulière, les teintes sont directes et descendent très-vite; dans quelques-unes on a observé le gris bleuâtre sur toute la surface, parfois seul, parfois succédant à la descente d'autres couleurs; sur un grand nombre, une seule a présenté la disposition inverse.

2° Dans le bocal ouvert. Durée de 12″ à 4′; dès l'instant de la formation, teintes inverses, comme pour

(1) Ce liquide, tel qu'il m'avait été fourni, était peu visqueux, et devait conséquemment renfermer de l'eau; on l'a concentré en le chauffant au bain-marie pendant plusieurs heures.

les acides lactique et acétique dans les mêmes circonstances ; mais, après un temps qui varie de 4″ à 30″, on voit se produire un phénomène singulier : tout le système d'anneaux se relève rapidement d'un côté en s'abaissant de l'autre, de façon à ne plus constituer que des demi-anneaux verticaux, ayant leur centre commun au niveau du liquide ; en même temps les anneaux colorés les plus éloignés de ce centre se resserrent de telle sorte que leur système occupe moins de la moitié de la calotte, dont tout le reste est alors blanc du premier ordre, et les choses demeurent en cet état jusqu'à la rupture.

Alcool. 1° Procédé des secousses dans un flacon. Durée maxima 1″,3 ; toutes les calottes sont colorées, après une phase blanche très-courte ; dans celles à anneaux horizontaux, les teintes sont directes.

2° Dans le bocal ouvert. Durée d'une fraction de seconde à 10″ ; après une phase incolore extrêmement courte, teintes inverses subites, et ne changeant pas, comme pour les trois liquides précédents dans la même condition.

Benzine[1] *et liqueur des Hollandais.* 1° Procédé des secousses dans un flacon. Pour chacun de ces deux liquides, durée maxima 1″ ; après une phase blanche plus longue, et quelquefois beaucoup, que la phase colorée, la plupart des calottes offrent des anneaux, et les teintes de ces derniers sont presque toujours directes.

2° Dans le bocal ouvert. Toutes les calottes sont incolores ; pour la benzine, elles éclatent à l'instant ou presque à l'instant de leur formation, et, pour la liqueur des Hollandais, elles ont une durée maxima de 0″,6.

Chloroforme et éther sulfurique. 1° Procédé des

(1) C'était de la benzine à fort peu près pure, préparée par M. Donny.

secousses dans un flacon. Durée maxima 1″; presque toutes incolores, les régulièrement colorées extrêmement rares, et offrant tantôt la disposition directe, tantôt la disposition inverse; phase blanche plus longue que la phase colorée.

2° Dans le bocal ouvert. Toutes incolores; pour le chloroforme, éclatant à l'instant de leur formation; pour l'éther, persistant au maximum 0″,4.

Sulfure de carbone. On n'obtient jamais de couleurs, du moins aux températures ordinaires. Dans le flacon, la durée maxima est de 0″,8; dans le bocal ouvert, toutes les calottes éclatent à l'instant de leur formation.

On comprendra nettement plus loin pourquoi, malgré l'absence de coloration, j'ai rangé ce liquide dans la deuxième catégorie. On voit, d'ailleurs, qu'il appartient à celle-ci par la courte persistance; dans le bocal ouvert, il se comporte comme le chloroforme, et l'on admettra sans peine que, dans le flacon, l'absence des couleurs tient au peu de durée des calottes, qui éclatent avant la fin de la petite phase blanche.

§ 248. Passons à la troisième catégorie.

Solution de savon de Marseille[1], dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau. Les calottes demeurent d'abord incolores pendant un intervalle de 6″ à 20″, puis se recouvrent d'un moiré extrêmement pâle rouge et vert, qu'on voit quelquefois naître au sommet; ce moiré se fonce, et alors on reconnaît qu'il est formé de trois larges zones, dans chacune desquelles l'une des deux

(1) Ce liquide a été préparé en dissolvant, à une chaleur modérée, une partie de savon dans 40 parties d'eau distillée, filtrant la solution après refroidissement, et la reversant dans le filtre jusqu'à ce qu'on l'obtint limpide. Il faut l'employer le jour même de sa préparation; dès le lendemain, elle est déjà plus ou moins altérée.

couleurs domine sous la forme de têtards; ceux-ci ont un mouvement ascensionnel, et changent de teinte en passant d'une zone à une autre; les couleurs dominantes des zones, toujours dues à des têtards qui montent, varient ensuite, et indiquent la disposition directe. Après un temps de 3′ à 20′ à partir de la formation de la calotte, on voit apparaître, au sommet, une petite tache noire qui s'entoure de blanc, grandit très-lentement et finit, après un intervalle d'une demi-heure à deux heures, par envahir toute la calotte; celle-ci persiste alors en cet état, et sa durée totale est de plusieurs heures; des calottes ont persisté au delà de vingt-quatre heures, avec une particularité dont nous parlerons plus loin.

Dans le bocal toujours fermé, mais sans eau au fond ni sur les parois, les calottes ne durent que 4′ à 5′, et la tache noire n'atteint, au maximum, que 5^{mm} de diamètre.

Solution de savon mou de ménage[1], dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau. Phase incolore de 5″ à 14″; les phénomènes ultérieurs n'ont été suivis que sur une seule calotte; elle s'est d'abord comportée sensiblement comme celles de savon de Marseille, jusqu'à ce qu'elle fût devenue entièrement noire; mais, en l'observant une heure et demie plus tard, on a constaté avec surprise qu'elle était de nouveau incolore, avec quelques

(1) Elle a été préparée comme celle de savon de Marseille, avec cette différence qu'elle contenait une partie de savon pour 30 parties d'eau; j'ai cru nécessaire d'employer cette proportion un peu plus forte, à cause de la grande humidité du savon mou.

Ce savon, de qualité très-inférieure, étant sans doute assez impur, la solution, bien que rendue parfaitement limpide par filtration, ne tarde pas à se ternir à sa surface, où vient probablement se rassembler quelque substance étrangère; il faut donc, avant de s'en servir, en enlever les couches supérieures au moyen d'une cuiller, ou recueillir, avec un siphon, le liquide sous-jacent.

points jaunes, et n'offrait plus qu'une tache noire très-petite. Elle a éclaté peu de temps après, et avait persisté au delà de trois heures.

Solution de savon de colophane à base de potasse(1), dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau. Les calottes présentent une particularité exceptionnelle dans cette catégorie : elles n'ont pas de phase incolore; dès leur apparition, elles sont couvertes d'anneaux rouges et verts qui, peu de temps après, se transforment en un moiré général des mêmes couleurs; un peu plus tard, ce moiré prend d'autres nuances, ou fait place à une teinte uniforme vert jaunâtre pointillée de bleu. Sur plusieurs calottes, 10′ à 30′ après leur formation, une tache noire apparaît au sommet, grandit assez rapidement, et envahit la totalité ou la presque totalité de la calotte. Durée maxima une heure.

Solution de saponine(2), idem. Phase incolore de 25′

(1) Ce savon ne se trouvant pas, je pense, dans le commerce, on l'a préparé en dissolvant, à chaud, de la colophane en poudre fine dans une solution de potasse caustique formée d'une partie de potasse solide et de 20 parties d'eau distillée. Pour avoir un liquide neutre, on a continué à ajouter de la colophane jusqu'à ce qu'il en restât un dépôt notable au fond; par le refroidissement, il s'est précipité une quantité considérable de savon non dissous; on a ajouté alors à l'ensemble la moitié de son volume d'eau distillée, on a chauffé de nouveau, puis on a abandonné le mélange à lui-même jusqu'au lendemain, après quoi on a décanté. Ce liquide a donné, avec la pipe, des bulles dont le diamètre maximum était de 18 centimètres.

Je dois dire qu'une nouvelle préparation, effectuée avec un autre échantillon de colophane, m'a donné des résultats différents ; la solution, au lieu de laisser déposer, par le refroidissement, du savon non dissous, s'est prise en gelée, et l'addition d'eau y a déterminé un abondant précipité; on a fait disparaître complétement celui-ci en dissolvant dans le liquide quelques petits fragments de potasse; mais, avec la solution ainsi obtenue, le diamètre maximum des bulles n'était que de 12 centimètres. Je me suis donc contenté des essais de calottes faits en employant la première solution.

(2) Une partie environ de saponine dans 100 parties d'eau distillée. Je dis environ, parce qu'une circonstance m'a empêché de connaître la proportion

à 40′, puis apparition d'un moiré général rouge et vert, dans lequel on voit quelquefois, plus tard, un peu de pourpre et de bleu. Durée maxima douze heures.

Solution d'albumine(1), idem. Phase incolore de plusieurs heures, puis apparition d'un moiré général rouge et vert. La calotte persiste ensuite dans le même état, et sa durée totale peut comprendre plusieurs jours.

Solution d'acétate de peroxyde de fer, idem. La plupart des calottes manifestent un phénomène bizarre : après une phase incolore de 15″ à 30″, on voit naître, à la base de la calotte, des anneaux rouges et verts qui bientôt se convertissent en un moiré des mêmes couleurs ; ce moiré s'étend graduellement à plus ou moins de hauteur, pâlit, et disparaît pour donner lieu à une seconde phase incolore ; à celle-ci succède, une demi-heure environ après la formation de la calotte, un nouveau moiré rouge et vert qui se montre partout à la fois, et qui, lorsque la calotte persiste assez longtemps, prend ensuite d'autres teintes. Ces calottes peuvent se maintenir au délà de vingt-quatre heures. Pour quelques autres, il n'y a qu'une seule phase incolore, mais qui peut atteindre une heure.

§ 249. Restent les deux liquides intermédiaires mentionnés à la fin du § 245.

Solution d'une partie de gomme arabique dans 10 *parties*

exacte. Cette solution donnait, avec la pipe, des bulles de 12 centimètres de diamètre maximum.

Avec d'autres échantillons de saponine, j'ai dû, pour obtenir ces grosses bulles, employer une proportion d'eau un peu moindre. Il faut avoir soin d'amener le liquide, par des filtrations, à l'état de limpidité parfaite; un trouble, même léger, amoindrit considérablement les bulles.

(1) Pour préparer cette solution, on a simplement battu des blancs d'œufs frais en neige, puis on a attendu que cette neige eût reformé du liquide en quantité suffisante; enfin on a ajouté à celui-ci un dixième de son volume d'eau distillée. Ce mélange donne, avec la pipe, des bulles de 13 centimètres de diamètre maximum.

d'eau. Cette solution ne donne pas de bulles avec la pipe. On a fait, dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau, onze calottes, parmi lesquelles sept, dont les durées ont été de 20″ à 60″, sont restées incolores jusqu'à leur rupture; sur deux autres, qui ont duré 1′ environ, il y a eu, après une phase incolore de 20″, apparition, au sommet, d'un peu de moiré rouge et vert demeurant dans le même état; mais deux ont persisté respectivement seize heures et vingt et une heures, et se sont couvertes en totalité, après de longues phases incolores, d'un moiré rouge et vert qui, plus tard, a passé au jaune, pourpre et bleu. Enfin ce liquide fournit une mousse assez abondante, et extrêmement durable.

Parmi les calottes, on le voit, la plupart se comportent comme celles de la première catégorie, mais quelques-unes comme celles de la troisième; l'abondance et la persistance de la mousse appartiennent à la troisième catégorie, et la non-formation des bulles à la première.

La solution dont il s'agit constitue l'un des liquides exceptionnels auxquels j'ai fait allusion dans le § 242, comme fournissant une mousse volumineuse et persistante, et ne se laissant cependant pas gonfler en bulles.

Solution de colophane dans l'huile d'olive(1), dans le bocal ouvert. Après une phase incolore très-courte, toutes les calottes manifestent des phénomènes de coloration pareils à ceux de l'huile d'olive pure (§ 247), seulement ils sont moins rapides; la durée des calottes est très-variable, et peut atteindre 2′,5. Ces faits sont de la deuxième catégorie; mais, à l'orifice de la pipe, on

(1) On n'a pas mesuré la proportion de colophane; seulement on a constaté qu'elle ne devait pas dépasser une certaine limite, sans doute parce qu'alors le liquide est trop visqueux. La solution a été préparée à chaud, puis, après refroidissement, filtrée à travers un papier suffisamment perméable.

obtient des bulles de 3,5 centimètres au maximum, ce qui est une tendance vers la troisième.

Avec plusieurs autres liquides encore, tels que des solutions saturées ou convenablement concentrées de borates neutres de soude et de potasse, de perchlorure de fer, de chlorure d'or, etc., on obtient de petites bulles de 3 à 4 centimètres, et, si l'on examinait ces liquides au point de vue de leurs calottes, on trouverait, sans doute, qu'ils appartiennent aussi à des catégories intermédiaires, ou, tout au moins, qu'ils sont à la limite de l'une des trois catégories principales.

§ 250. Bien que les expériences dont les résultats sont rapportés dans les quatre paragraphes précédents aient été effectuées sur des lames de petites dimensions, elles nous ont révélé des faits remarquables, tels qu'une partie des caractères qui distinguent nos trois catégories, la grande influence des atmosphères dans lesquelles les lames sont produites, etc., et plusieurs de ces faits jettent, on le verra, un grand jour sur la question que j'essaie de résoudre dans ce chapitre.

Considérons une calotte au moment où elle vient d'être développée, et cherchons ce qui doit s'y passer. Nous savons que le liquide, entraîné par la pesanteur, descend de tous les côtés autour du sommet, d'où résulte un amincissement progressif de la lame ; mais nous allons examiner de plus près comment s'opère cet amincissement.

Pour simplifier, portons d'abord notre attention sur l'une des deux faces de la lame, sur la face convexe, par exemple, et concevons-la partagée en anneaux moléculaires horizontaux, depuis le sommet jusqu'à la base. Tous ces anneaux descendent, et conséquemment chacun d'eux va en augmentant toujours de diamètre, ce qui exige que ses molécules s'écartent davantage et que d'autres molécules, appartenant à la couche sous-jacente, viennent se loger dans les interstices pour rétablir un arrangement uniforme. La même chose doit s'entendre de la face concave, et il est clair, en outre, que des mouvements moléculaires analogues se produisent dans l'épaisseur même de la lame. C'est évidemment au sommet et dans son voisinage que les phénomènes dont il s'agit sont le plus prononcés; c'est là que les écarts des molécules sont surtout considérables et que, par suite, l'appel du liquide intérieur est le plus abondant.

Si donc la cause que je viens de signaler agissait seule, l'amincissement serait toujours le plus rapide au sommet et dans ses environs, et la lame présenterait toujours une épaisseur décroissante à partir de la base. Mais, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer (§ 109), ces inégalités d'épaisseur donnent elles-mêmes naissance à une seconde cause, qui tend à les effacer, ou au moins à les diminuer; en effet, les portions plus épaisses étant plus pesantes, surmontent plus aisément les résistances de frottement qui s'opposent à leur descente, et celle-ci doit conséquemment être accélérée du sommet à la base; or, par suite de cette accélération, les molécules vont en s'écartant de plus en plus dans le sens méridien, à partir du sommet, d'où résulte un appel de liquide intérieur de plus en plus abondant jusqu'à la base, et l'accroissement de ce dernier appel doit compenser, en tout ou en partie, le décroissement de celui qui provient de la première cause.

Enfin une dernière cause s'ajoute à la seconde : c'est que, plus on se rapproche de la base, plus est rapide la pente sur laquelle glisse le liquide.

Si la première des trois causes prédomine, la lame présentera nécessairement une épaisseur décroissante de la base au sommet; s'il arrive que cette première cause soit contre-balancée par l'ensemble des deux autres, l'épaisseur de la lame deviendra uniforme, et continuera ensuite à s'amoindrir également partout; enfin si l'ensemble des deux dernières causes l'emporte, l'épaisseur sera croissante de la base au sommet; or nous avons vu ces trois cas se réaliser :

En effet, quand on opérait dans des conditions convenables, le premier s'est montré, immédiatement ou peu de temps après le développement de la lame, dans les calottes de tous les liquides de la deuxième catégorie, sauf, bien entendu, celles de sulfure de carbone; il s'est montré sans doute aussi dans celles de savon de colophane, quoiqu'on n'ait pu le déduire nettement des teintes des anneaux; enfin il s'est montré encore, après la longue phase blanche, dans les calottes de savon de Marseille. Le phénomène se produit probablement, dans les autres calottes de la troisième catégorie, pendant la phase blanche, et dans toutes celles de la première; mais l'absence de couleurs ne permet pas d'en acquérir la certitude.

Le second cas a suivi le premier dans les calottes d'huile d'olive, d'huile d'amande douce, et dans celles d'acide lactique formées au sein d'une atmosphère desséchée, puisque, en approchant de la rupture, la totalité ou la presque totalité de leur surface présentait le blanc du premier ordre ou le gris bleuâtre qui précède le noir. Quelques calottes d'essence de térébenthine ont offert un résultat analogue; dans celles de savon de colophane, le moiré fin rouge et vert qui a succédé aux anneaux peut être regardé comme à peu près équivalent à une teinte uniforme, car la moyenne des épaisseurs des petites portions rouges et vertes juxtaposées est sans doute la même sur toute l'étendue de la calotte ; et ceci doit s'entendre, à plus forte raison, du moiré semblable qui apparaît après la phase blanche dans d'autres calottes de la troisième catégorie et dans quelques-unes de celles de la première, moiré qui ordinairement naît partout à la fois.

Enfin le troisième cas est celui des calottes de la deuxième catégorie sur lesquelles les teintes ont pris, dans certaines conditions, la disposition inverse.

§ 251. Insistons un moment sur ce troisième cas. Pour peu qu'on y réfléchisse, on comprendra que l'accélération de vitesse due à l'excès d'épaisseur des portions inférieures de la lame est tout au plus capable d'effacer cette inégalité, et qu'un décroissement d'épaisseur du sommet à la base, décroissement qui donne l'inversion des teintes, peut être attribué aux variations de la pente; c'est ce qu'appuie, en effet, une expérience simple :

Dans un tube de verre de 1,5 centimètre de diamètre et de 15 de longueur, fermé à une extrémité, on a introduit une petite quantité d'essence de térébenthine; puis, tenant ce tube incliné à environ 45°, on y a produit, par des secousses convenables, une lame transversale, lame conséquemment inclinée aussi, mais qui, étant plane, présentait la même pente du haut jusqu'au bas. La lame ainsi placée ayant sa face inférieure tournée vers le liquide et sa face supérieure vers l'ouverture du tube, se trouvait, à l'égard de l'évaporation, sensiblement dans les mêmes conditions que les calottes du même liquide formées dans le bocal ouvert; or, tandis que ces dernières s'étaient nettement revêtues de teintes inverses (§ 247), la lame plane du tube a, dans tous les essais successifs, montré des teintes directes : au premier moment, ces teintes étaient, en partant de la bande inférieure, le bleu, l'indigo, le violet, l'orangé et le jaune, et celui-ci occupait plus de la moitié de la hauteur de la lame, puis on voyait naître immédiatement, vers le haut, du blanc qui s'étendait rapidement en refoulant les autres teintes, et envahissait la presque totalité de la lame.

§ 252. Les calottes de la deuxième catégorie se colorent, on l'a vu, immédiatement ou après fort peu de temps, sur toute leur surface, et leurs teintes atteignent en un instant, soit au sommet, soit à la base, le jaune ou le blanc du premier ordre, et même quelquefois un gris voisin du noir; d'où il faut conclure que les lames de cette deuxième catégorie s'amincissent avec une extrême vitesse. Pour plusieurs liquides, il est vrai, c'est seulement dans une partie des calottes que l'atténuation est poussé si loin; mais comme, à l'égard de ces liquides, la durée maxima n'excède guère 1″, on peut admettre que les calottes qui restent blanches sont formées de lames accidentellement plus épaisses, et revêtiraient bientôt toutes les teintes, si elles persistaient un peu plus longtemps. C'est, en effet, ce que nous avons observé dans les calottes de benzine, de liqueur des Hollandais, de chloroforme et d'éther, où la phase incolore approchait quelquefois de 1″. Je reviendrai d'ailleurs sur ce point.

Dans les calottes de la première catégorie, il n'y a jamais, on l'a vu aussi, coloration immédiate ou presque telle; la très-grande majorité restent blanches jusqu'à leur rupture, bien que, pour certains liquides, elles puissent durer au delà de 2′; sur les rares calottes où l'on observe des phénomènes de coloration, ces phénomènes se réduisent, en général, à un système minime d'anneaux occupant le sommet et conservant ses petites dimensions; enfin, dans le nombre de cas fort restreint où il y a coloration totale, celle-ci ne se montre qu'après plusieurs secondes, quelquefois après deux minutes. Il résulte évidemment de tout cela que les lames de la première catégorie s'amincissent, au contraire, très-lentement.

Dans les calottes de la troisième catégorie, il y a également, nous le savons encore, une phase blanche généralement longue, et la coloration qui se manifeste ensuite ne varie jamais avec rapidité. Il suit de là que, dans la troisième catégorie, comme dans la première, l'amincissement des lames est fort lent. A la vérité, par exception, les calottes de la solution de savon de colophane n'ont pas de phase incolore, et sont d'abord couvertes d'anneaux rouges et verts; mais elles peuvent persister une heure, en changeant progressivement d'aspect.

Faut-il attribuer à la viscosité, telle qu'on l'entend, cette grande différence dans la vitesse d'amincissement des lames entre la deuxième catégorie et les deux autres? Nullement, car les huiles grasses et l'acide lactique, qui appartiennent à la deuxième catégorie, sont des liquides beaucoup plus visqueux que la plupart de ceux de la première et de la troisième; enfin l'essence de térébenthine, de la deuxième également, est plus visqueuse que l'eau, qui est de la première.

Or ce qui caractérise une lame, c'est l'étendue considérable des surfaces relativement au volume; force nous est donc de reconnaître ici une influence des faces de la lame, et de chercher la cause de la grande différence dont il s'agit dans une sorte de viscosité propre des couches superficielles, indépendante, ou à peu près, de la viscosité intérieure, et qui, très-faible dans les liquides de la deuxième catégorie, est, au contraire, très-forte dans ceux de la première et de la troisième.

Ainsi que je l'ai déjà dit, une opinion du même genre avait été avancée il y a longtemps, et elle a été soutenue depuis par plusieurs physiciens; j'y reviendrai plus loin (§§ 261 à 290), et l'on verra alors ce qui distingue mon principe.

§ 253. Ce principe admis, appliquons-le aux phénomènes. Prenons de nouveau une calotte au moment de sa génération, concevons encore ses deux faces partagées en anneaux moléculaires horizontaux qui descendent en s'élargissant, et considérons en particulier l'un d'eux à son départ du sommet. Il est clair que, pour un petit trajet effectué, les distances entre les molécules de cet anneau s'accroissent considérablement : par exemple, de la position où son diamètre est de $0^{mm},01$ à celle où il est de $0^{mm},1$, ces distances sont devenues décuples. On admettra, de plus, sans peine que les mouvements dont il s'agit ne s'exécutent pas avec une régularité mathématique, et qu'ainsi, dans un même anneau, les intervales moléculaires ne demeurent pas absolument égaux entre eux. Cela posé, imaginons que quelque cause mette obstacle à la libre arrivée des molécules sous-jacentes dans les interstices; l'un ou l'autre de ceux-ci deviendra bientôt assez grand pour que l'attraction des molécules qu'il sépare ne puisse plus contre-balancer la tension ; alors ces molécules entraîneront aisément leurs voisines plus intérieures, qui, elles aussi, subissent des écartements, la séparation s'approfondira de proche en proche, et la lame se déchirera en ce point. Or, dans les calottes de la première catégorie, les couches superficielles ont, d'après mon principe, une très-forte viscosité, les mouvements moléculaires y sont difficiles, et l'on comprend dès lors que, très-près du sommet de l'une ou de l'autre des faces, un intervalle moléculaire agrandi peut n'avoir pas le temps d'être comblé avant que la tension, si elle est assez énergique, y détermine le déchirement ci-dessus. Telle est, selon moi, l'explication de la rupture de presque toutes les calottes de la première catégorie avant qu'on distingue sur elles aucune coloration.

Mais, on le comprend aussi, ce déchirement peut ne pas être complet; il peut ne provoquer qu'une atténuation locale, autour de laquelle les molécules prendront un arrangement régulier; on aura alors le système de petits anneaux au sommet. Ce système doit donc apparaître brusquement, ce qui est conforme à l'expérience, et il doit conserver ensuite sensiblement ses dimensions, la cause qui l'a fait naître ayant produit tout son effet, ce qui est également conforme à l'expérience. Mais rien n'empêche évidemment le reste de la lame de continuer à s'amincir par degrés, et, en effet, deux de nos calottes d'eau distillée qui avaient le petit système en question, ont offert, peu avant leur rupture, le moiré général.

Quant à la rupture définitive en présence de ce petit système, elle provient de ce que la portion exiguë de lame qui occupe le centre de celui-ci s'amincit ultérieurement et éprouve ainsi elle-même un déchirement qui, cette fois, est complet par suite de la minceur; ou bien de ce que la lamelle dont il s'agit s'atténue à tel point qu'elle ne peut plus résister aux trépidations venues de l'extérieur.

Si ces idées sont exactes, toute cause qui tendra à imprimer des mouvements irréguliers aux molécules des faces de la lame, devra favoriser le déchirement; or c'est ce que confirme une expérience curieuse : si l'on produit les calottes d'eau distillée dans une atmosphère saturée de vapeur d'alcool, vapeur dont l'absorption par la surface extérieure des lames doit nécessairement y occasionner des mouvements désordonnés, toutes éclatent à l'instant même de leur formation.

Mais pourquoi les calottes d'eau ne présentent-elles jamais le petit système d'anneaux quand on les développe dans une atmosphère desséchée? C'est que, sans doute, lorsqu'un déchirement tend à se produire avec assez peu de force pour ne donner lieu qu'à ce petit système, les molécules extérieures dont l'écartement aurait amené le déchirement partiel, sont enlevées par l'évaporation avant que le phénomène ait pu progresser; dans ce cas donc, les déchirements assez énergiques pour briser la lame sont les seuls qui s'accompliront.

Enfin comment se fait-il que les calottes d'eau, qui ont persisté aussi longtemps dans une atmosphère desséchée que dans une atmosphère humide, n'aient jamais, dans la première, présenté le moiré général, bien que l'évaporation dût, semble-t-il, activer l'amincissement? Essayons de rendre raison de cette singularité. Chacune des deux couches superficielles ayant l'une de ses faces libre dans l'air, les molécules qui occupent cette face éprouvent beaucoup moins de résistance dans leurs mouvements que celles plus profondément situées dans la même couche ; ces molécules doivent conséquemment descendre avec moins de lenteur, et communiquer une partie de leur petit excès de vitesse aux molécules sous-jacentes; dès lors l'évaporation, en enlevant incessamment les molécules de la face extérieure de la calotte, empêche cette communication de vitesse, et retarde ainsi la descente. Si donc l'évaporation tend à accélérer l'amincissement en soustrayant de la matière à la lame, elle tend en même temps à le ralentir en ralentissant la descente, et l'on comprend que le second effet peut l'emporter sur le premier. Nous verrons bientôt cette conjecture appuyée.

On voit maintenant pourquoi il est impossible de gonfler des bulles avec les liquides de la première catégorie : c'est que la lame ne peut s'étendre sous l'action du souffle sans que les molécules de ses deux faces s'écartent continuellement pour appeler dans leurs interstices des molécules plus intérieures, ce qui donne lieu à des chances multipliées de déchirement.

Souvent même la lame plane qu'on puise avec l'orifice de la pipe, éclate avant qu'on ait eu le temps de commencer à souffler. C'est que cette lame est attachée au pourtour de l'orifice par l'intermédiaire d'une petite masse à courbures transversales concaves extrêmement fortes, et que celle-ci, en vertu de ces fortes courbures, attire puissamment à elle le liquide de la lame (§ 219); or de là résultent, surtout dans le voisinage du pourtour, de grands mouvements moléculaires qui, à cause encore de la liberté relative des molécules des deux faces extrêmes, déterminent, dans ces dernières, des écarts considérables avec appel du liquide intérieur.

Enfin c'est par la même raison que les liquides dont il s'agit ne donnent jamais de mousse abondante et persistante, chacune des lamelles dont l'ensemble compose la mousse étant également attachée aux lamelles environnantes par l'intermédiaire de petites masses à très-fortes courbures concaves.

§ 254. Dans les lames de la deuxième catégorie, les déchirements par les causes que j'ai signalées doivent être infiniment plus rares; ici, en effet, d'après mon principe, la mobilité moléculaire des couches superficielles est très-grande, et conséquemment il y a peu d'obstacle à l'arrivée des molécules intérieures dans les interstices agrandis des extérieures. Aussi avons-nous vu les lames de cette catégorie atteindre rapidement une extrême ténuité, soit dans toute l'étendue d'une même calotte, soit surtout au sommet ou à la base. Si les lames se brisent ensuite, c'est sans doute sous l'influence des petites vibrations propagées par le sol, et l'on comprend que les lames des différents liquides doivent résister inégalement à cette cause accidentelle de rupture; ainsi, tandis que les calottes d'huile d'amande douce ne persistent au maximum que 0",2, celles d'acide lactique peuvent durer 18", et celles d'essence de térébenthine 6" dans le flacon, et jusqu'à 4' dans le bocal ouvert.

Cette atténuation si rapide nous apprend pourquoi l'on ne parvient pas non plus à gonfler des bulles avec les liquides dont il s'agit : quand on a puisé une lame plane dans l'orifice de la pipe, la succion opérée par la petite masse qui règne le long du pourtour, et la descente du liquide due à ce qu'on ne tient pas l'orifice parfaitement horizontal, rendent presque instantanément cette lame si mince, qu'elle éclate souvent par les petits mouvements inévitables de la main avant qu'on ait pu porter le tube à la bouche; et lorsque cela n'arrive pas, l'extension naissante de la lame par l'insufflation, et la descente du liquide vers le point le plus bas, amènent bientôt le même effet. Ces considérations s'appliquent également à la mousse.

Cependant on conçoit qu'il peut y avoir des liquides à couches superficielles très-mobiles, mais tels que leurs lames, même fort atténuées, aient encore assez de cohésion pour résister plus ou moins aux causes de rupture ci-dessus ; ces liquides se laisseront gonfler en bulles de quelques centimètres de diamètre, et c'est ce dont la solution de colophane dans l'huile d'olive nous a offert un exemple (§ 249).

§ 255. Le phénomène de l'inversion des teintes est également lié au peu de viscosité des couches superficielles, puisqu'il ne se manifeste qu'avec les liquides de la deuxième catégorie ; et, en effet, pour que l'amincissement puisse s'opérer plus vite dans le bas d'une calotte que dans le haut, il faut que la portion inférieure de l'une au moins des deux couches superficielles n'entraîne pas la portion supérieure, il faut qu'il y ait une sorte d'indépendance entre ces deux portions, indépendance qui exige évidemment une grande mobilité moléculaire dans les couches en question. On comprend, de plus, que les causes qui peuvent apporter du trouble dans les molécules superficielles, favoriseront cette indépendance en dérangeant la liaison des différents points d'une même couche ; c'est ainsi que l'absorption de l'humidité dans les calottes d'acide lactique, et l'évaporation dans celles d'acide acétique, d'essence de térébenthine et d'alcool, déterminent l'inversion des teintes.

Je ferai remarquer ici que ces causes de trouble provoquent encore le phénomène de l'inversion lors même qu'elles sont extrêmement peu intenses : par exemple, on a produit des calottes d'acide acétique et d'essence de térébenthine dans le bocal fermé, en employant toutes les précautions indiquées au § 244; pour l'essence de térébenthine, on avait même introduit dans le bas du tube de la ouate imbibée du même liquide, afin de saturer l'air amené par le souffle; dans ces circonstances, l'atmosphère intérieure devait être à fort peu près saturée, de sorte que l'évaporation était nécessairement bien faible, et cependant les teintes ont été nettement inverses. Dans ces mêmes conditions, les calottes d'acide acétique les moins durables n'avaient que du rouge et du vert à la base, ce qui montre bien que le développement des teintes inverses provient de ce que le bas de la lame commence par s'amincir plus vite que le haut.

Mais l'amincissement d'abord si rapide dans le bas, ne doit pas tarder à se ralentir, par la diminution même de l'épaisseur de cette portion de la lame, et bientôt la perte qu'éprouve cette même portion par la descente de son liquide et par l'évaporation, doit se trouver exactement compensée par le liquide qui arrive des portions supérieures; à partir de ce moment, les anneaux inférieurs doivent donc paraître stationnaires dans leurs teintes et dans leurs positions, ce que nous avons effectivement constaté, on l'a vu, dans les calottes qui persistent assez longtemps.

J'ai essayé (§ 253) de faire comprendre que l'évaporation pouvait ralentir l'amincissement; or c'est ce que confirment nos expériences sur les calottes à teintes inverses : j'ai dit, plus haut, que l'acide acétique et l'essence de térébenthine donnaient encore de semblables calottes dans une atmosphère à très-peu près saturée et lorsque, par conséquent, l'évaporation était considérablement réduite; or les durées maxima respectives ont été alors 0″,4 et 2′, tandis que, dans le bocal ouvert, c'est-à-dire avec une évaporation libre, les durées maxima respectives se sont élevées à 2′ et à 4′.

Quant à la chute latérale du système des anneaux dans les calottes à teintes inverses d'essence de térébenthine, on peut, je pense, l'expliquer en assimilant ce qu'il y a d'excédant en épaisseur dans la portion supérieure de la calotte, à une seconde calotte de moindre base posée sur la première; cette seconde calotte se trouve, en effet, dans un état d'équilibre instable, et les petites causes étrangères doivent la faire glisser de côté. Seulement il est singulier que les calottes d'alcool produites dans le bocal ouvert, calottes qui, nous le savons, ont aussi les teintes inverses et persistent assez longtemps, ne présentent pas le même phénomène.

§ 256. Disons ici que M. Van der Mensbrugghe me propose une explication de l'inversion des teintes toute différente de celle que j'ai avancée dans les paragraphes précédents. L'expérience du § 172 montre qu'il suffit d'une variation excessivement minime dans la température, et conséquemment dans la tension d'une partie d'une lame liquide pour amener des changements très-notables dans la distribution des teintes ; or M. Van der Mensbrugghe suppose que, dans les calottes de la deuxième catégorie formées de liquides volatils au sein d'une atmosphère non saturée, l'évaporation est, par une cause quelconque, un peu plus abondante au sommet qu'à la base ; de là, dans le haut de la calotte, un refroidissement un peu plus grand, et, par suite, une petite augmentation de tension, d'où résulte un appel du liquide de la partie inférieure, et une épaisseur croissante de bas en haut. On se rendrait ainsi nettement raison du maintien des teintes dans leurs positions respectives, de la durée plus grande de la calotte lorsque les teintes sont inverses que lorsqu'elles sont directes, de la non-inversion des teintes dans une atmosphère saturée de la vapeur du liquide, et enfin des courants ascendants partant de la base et qui ont été observés par Fusinieri (§ 324). L'acide lactique, qui n'est pas volatil, a donné aussi, il est vrai, des calottes à teintes inverses ; mais ce liquide absorbe l'humidité de l'air, et si l'on admet que cette absorption est quelque peu plus active dans le haut de la calotte, on comprendra qu'il doit en résulter aussi une augmentation de tension.

Cette théorie est ingénieuse, mais elle devrait être appuyée par de nouvelles expériences : il faudrait montrer l'origine de la différence d'évaporation ou d'absorption au sommet et à la base; en outre, si l'on songe que l'inversion des teintes se manifeste encore dans une atmosphère presque complétement saturée, on aura peine à concevoir que l'excès de tension pour ainsi dire insensible qui pourrait naître dans ce cas, suffise pour surmonter l'action de la pesanteur sur le liquide de la calotte; enfin, après la chute latérale des anneaux dans les calottes d'essence de térébenthine, l'excès d'évaporation au sommet devrait les y ramener; Fusinieri a observé, à la vérité, de semblables retours, mais ils auraient dû se produire également dans mes expériences.

D'autre part, suivant ma théorie, du liquide descend continuellement de la partie supérieure de la calotte pour réparer la perte que subirait la partie inférieure; si donc Fusinieri ne s'est pas trompé, si les courants ascendants ont bien réellement lieu, ils constituent une objection sérieuse contre mon explication; enfin celle-ci ne montre pas bien comment, dans une calotte qui persiste quelquefois plusieurs minutes, l'évaporation ne finit pas par amincir sensiblement la lame, et laisse ainsi les teintes inverses invariables jusqu'à la rupture. Des recherches ultérieures éclairciront sans doute ces difficultés.

§ 257. Un fait plus obscur que l'inversion des teintes, c'est la rupture spontanée, avant la fin de la phase blanche, de la grande majorité des calottes de chloroforme et d'éther, et de toutes celles de sulfure de carbone. Ce phénomène paraît dépendre non de l'évaporation elle-même, puisqu'il se produit dans l'atmosphère aussi saturée que possible du flacon, mais plutôt de la grande tendance des liquides ci-dessus à s'évaporer. En effet, si l'on range tous nos liquides volatils de la deuxième catégorie d'après l'ordre croissant de leurs volatilités respectives, on a la série suivante : 1° l'acide acétique et l'essence de térébenthine; 2° l'alcool; 3° la benzine et la liqueur des Hollandais; 4° le chloroforme; 5° l'éther; 6° le sulfure de carbone[1]; or nous avons vu que, dans le flacon : 1° toutes les calottes d'acide acétique, d'essence de térébenthine et d'alcool se sont colorées soit sans phase blanche, soit après une phase blanche très-courte; 2° toutes celles de benzine et de liqueur des Hollandais se sont de même colorées, mais après une phase blanche qui approchait quelquefois de 1″ et ne laissait alors à la phase colorée que la durée d'un éclair; 3° presque toutes celles de chloroforme et d'éther ont éclaté sans couleurs; 4° toutes celles de sulfure de carbone ont éclaté de cette manière; d'où l'on peut inférer que la disposition à éclater pendant la phase blanche croît avec la disposition à s'évaporer.

L'alcool employé dans ces expériences était l'alcool du commerce ; j'ai voulu savoir ce que donnerait l'alcool absolu, qui se place, quant à sa volatilité, entre le précédent et le couple benzine et liqueur des Hollandais; or, dans le flacon, beaucoup de ses calottes éclatent incolores; il se trouve donc, sous ce point de vue, entre le couple ci-dessus et le couple chloroforme et éther, et constitue ainsi une légère anomalie; mais je ne pense pas que celle-ci suffise pour empêcher d'admettre d'une manière générale l'influence de la volatilité.

Maintenant comment la simple tendance à se volatiliser peut-elle occasionner la rupture? N'est-il pas permis

(1) Pour comparer sous ce point de vue les liquides dont il s'agit, on en a rempli exactement une suite de verres de montre identiques placés à distance les uns des autres sur l'appui extérieur d'une fenêtre au Nord, par une température de 18°, et on les a observés de temps en temps afin de constater leurs diminutions respectives.

de croire que si, dans une atmosphère libre, les liquides en question perdent avec tant de facilité leurs molécules superficielles par l'évaporation, c'est que ces molécules ont fort peu de cohérence entre elles? Dans cette hypothèse, on comprend qu'il faut peu de chose pour amener un déchirement malgré la mobilité des couches superficielles; alors aussi une cause de trouble dans les molécules extérieures, l'évaporation, par exemple, favorisera ce déchirement, et nous avons vu, en effet, que, dans le bocal ouvert, les calottes de benzine, de liqueur des Hollandais, de chloroforme, d'éther et de sulfure de carbone éclatent à l'instant de leur formation, ou persistent à peine au delà d'une demi-seconde.

Enfin je me suis dit que si la volatilité exerçait réellement une influence si prononcée sur les calottes de ces liquides, les phénomènes qu'elles présentent devaient se modifier si l'on diminuait la volatilité par un grand abaissement de la température. Or c'est ce que l'expérience a confirmé : des flacons renfermant respectivement du chloroforme, de l'éther et du sulfure de carbone ont été exposés pendant deux heures à l'extérieur, par une température de —4°, puis on y a fait, toujours à l'extérieur, l'essai des calottes. Dans ces conditions, les durées n'ont augmenté qu'un peu, mais les calottes colorées de chloroforme et d'éther ont été bien plus fréquentes, et le sulfure de carbone a donné un assez grand nombre de calottes vivement teintées; enfin les phases blanches précédant les couleurs se sont de beaucoup raccourcies. Ce dernier fait paraît indiquer que, même dans le flacon où l'on a pris toutes les précautions pour saturer l'atmosphère intérieure, la saturation n'est pas absolument complète, de sorte que les calottes subissent toujours une minime évaporation; dès lors, en effet, on comprend qu'une température très-basse amoindrissant encore ce petit reste d'évaporation, accélère un peu l'amincissement, et, par suite, raccourcit la phase blanche.

On voit actuellement que le sulfure de carbone, qui, aux températures ordinaires, ne manifeste jamais de coloration, devait cependant être placé, comme je l'ai fait, dans la deuxième catégorie. Ajoutons que s'il donne avec tant de difficulté des lames colorées, cela doit tenir, en partie, à la valeur élevée de son indice de réfraction; en effet, d'après la loi connue, il suit de cette valeur élevée que l'apparition des couleurs exige, dans les lames de sulfure de carbone, une ténuité plus grande que dans celles de tous les autres liquides.

§ 258. Arrivons enfin à la troisième catégorie, c'est-à-dire à la plus importante, à celle des liquides qui se laissent gonfler en bulles. Ici, comme dans la première catégorie, les couches superficielles ont peu de mobilité moléculaire, et l'amincissement s'effectue avec lenteur; mais les déchirements sont rares, puisque, malgré la descente du liquide et l'action du souffle, les lames persistent et peuvent recevoir une grande extension. Si l'on admet les idées exposées au § 253, on en conclura que, dans les liquides de la catégorie actuelle, la tension est insuffisante pour produire les déchirements, et c'est ce que vient appuyer la comparaison des tensions respectives de l'eau et de notre solution de savon de Marseille : la tension d'une lame d'eau à la température ordinaire, est, d'après Dupré, 14,6, et celle d'une lame de la solution de savon n'est, d'après le même savant, qui a bien voulu la déterminer pour moi, que 5,64, c'est-à-dire entre la moitié et le tiers de la précédente.

Cependant, pour qu'un liquide puisse s'étendre en bulles, il n'est pas indispensable que sa tension soit faible d'une manière absolue ; il suffit qu'elle le soit relativement à la viscosité des couches superficielles, ou, en d'autres termes, que le rapport entre la viscosité superficielle et la tension soit assez grand. Par exemple, les tensions respectives des lames de la solution saturée de chlorure de calcium et de la solution d'albumine, tensions mesurées par M. Van der Mensbrugghe(1), sont 11,06 et 11,42, c'est-à-dire à peu près égales et toutes deux assez fortes, et pourtant le premier de ces liquides ne donne pas de bulles, et, avec le second, on en obtient qui atteignent 13 centimètres de diamètre ; mais comme, dans les calottes de chlorure de calcium qui se sont moirées (§ 246), la phase incolore n'a été, au maximum, que de 150″, et que, dans celles d'albumine (§ 248),

(1) La plupart des tensions dont nous aurons à faire usage ont été évaluées par M. Van der Mensbrugghe, au moyen de deux procédés différents : le premier revient à celui de l'aréomètre de Dupré (§ 161); le second, qui est dû à M. Van der Mensbrugghe, présente cet avantage qu'il permet d'opérer sur une quantité extrêmement petite de liquide; voici en quoi il consiste essentiellement :

Un fil fin de coton est tendu horizontalement entre deux points fixes distants d'environ 12 centimètres. D'autre part, un tube en verre d'un décimètre de longueur et de 1^{mm} à peu près de diamètre extérieur, est garni, près de chacune de ses extrémités, d'un petit anneau en fil de fer mince, et soutient, par un fil de coton attaché en son milieu, un petit plateau en papier. Pour mesurer une tension, on mouille d'abord du liquide à essayer le fil horizontal, puis on transporte le tube sous celui-ci, de manière à le toucher par les deux petits anneaux ; entre ce tube et le fil horizontal règne ainsi un espace étroit, qu'on remplit du même liquide avec un pinceau ; après quoi on abandonne le tube, qui demeure suspendu par la tension des deux faces de la petite masse liquide. On verse alors doucement du sable fin sur le petit plateau, jusqu'à ce que le tube se détache. Enfin on pèse l'ensemble du tube, du plateau et du sable, et l'on divise le poids, exprimé en milligrammes, par la longueur comprise entre les deux petits anneaux ; le quotient est la valeur, en milligrammes, de la tension, par millimètre, d'une lame du liquide.

M. Van der Mensbrugghe a mesuré plusieurs tensions par les deux procédés successivement, et toujours les résultats se sont trouvés sensiblement d'accord.

elle a été de plusieurs heures, on voit que la viscosité superficielle de ce dernier liquide doit être regardée comme de beaucoup supérieure à celle du premier, et qu'ainsi le rapport entre cette viscosité et la tension est aussi beaucoup plus grand à l'égard du second liquide qu'à l'égard du premier.

Si l'on compare de même, au point de vue de leurs tensions et des viscosités propres de leurs couches superficielles, la solution de savon et celle d'albumine, les valeurs ci-dessus montrent que la tension des lames de la seconde est double de celle des lames de la première; mais, dans les calottes de savon, la phase incolore n'est, au maximum, que de 20″, tandis que, dans celles d'albumine, elle est, comme je viens de le rappeler, de plusieurs heures; ainsi, en passant du premier liquide au second, la tension et la viscosité des couches superficielles augmentent toutes deux considérablement, de sorte que leur rapport demeure suffisamment grand.

C'est que les déchirements exigent des mouvements relatifs des molécules, et que la viscosité propre des couches superficielles, viscosité qui rend ces mouvements difficiles, gêne aussi bien ceux qui mènent aux déchirements que ceux qui apportent des molécules intérieures dans les interstices agrandis des extérieures. Ainsi, en passant du savon à l'albumine, la tension, c'est-à-dire la force qui tend à déchirer les lames, devient double, mais la résistance à ce déchirement augmente en même temps par l'augmentation de la viscosité des couches superficielles, et les lames d'albumine s'étendent en bulles comme celles de savon, seulement à un moindre degré.

§ 259. Telle est donc la théorie que je propose : pour qu'un liquide puisse se développer en lames à la fois grandes et persistantes, et conséquemment se laisse gonfler en bulles, il faut d'abord que la viscosité propre des couches superficielles de ses lames soit forte, afin que l'amincissement s'opère avec lenteur; mais il faut, en outre, que sa tension soit relativement faible, afin qu'elle ne puisse vaincre la résistance opposée au déchirement par la viscosité ci-dessus lorsque, dans les mouvements superficiels, des molécules s'écartent outre mesure. Les liquides qui ont en même temps une forte viscosité superficielle et une tension relativement forte, ne donnent pas de bulles, parce que, chez eux, la tension est toujours capable de surmonter la résistance en question. Enfin les liquides qui n'ont qu'une faible viscosité superficielle ne donnent pas non plus de bulles, parce que leurs lames atteignent en trop peu de temps une ténuité extrême, et qu'alors elles se brisent par les petits ébranlements venus de l'extérieur, ou par d'autres causes étrangères.

Seulement, j'ai à présenter ici une remarque. Considérons deux liquides dont l'un ait une viscosité superficielle moins énergique que l'autre. Si l'on s'en tenait simplement aux principes ci-dessus, on devrait admettre que la tension suffisante pour opérer un déchirement est nécessairement plus faible suivant la même proportion dans le premier de ces liquides que dans le second, ou, en d'autres termes, qu'à chance égale de déchirement, le rapport des deux éléments, viscosité superficielle et tension, est le même dans les deux liquides; mais il faut faire attention que, lorsqu'un intervalle superficiel est trop agrandi, les molécules sous-jacentes viennent le remplir avec moins de difficulté dans premier liquide que dans le second, de sorte que le déchirement exige relativement plus de tension pour s'accomplir. Nous arrivons donc à cette conséquence qu'à égalité de chances de déchirement, ou, ce qui revient au même, à égalité de diamètre maximum des bulles quand les liquides sont de la troisième catégorie, le rapport des deux éléments est moins grand à l'égard du liquide dont la viscosité superficielle est moins forte. Et de là découle évidemment une deuxième conséquence, c'est que si le rapport des deux éléments est le même pour les deux liquides, les chances de déchirement deviennent moindres pour celui qui a la moindre viscosité superficielle, de sorte qu'il doit donner des bulles plus grosses que l'autre, ou que, tandis qu'il en donne, l'autre n'en donne pas. Nous verrons plus loin (§ 297) les résultats des expériences s'accorder avec ces déductions.

Enfin une dernière conséquence, que nous connaissons déjà et que nous savons être vérifiée par les faits, c'est que, dans la deuxième catégorie, où la viscosité superficielle est extrêmement faible, les chances de déchirement sont, en général, pour ainsi dire nulles quelle que soit la tension, de sorte que les lames arrivent librement à une excessive ténuité; aussi beaucoup de liquides de cette catégorie se laisseraient-ils façonner en grosses bulles, si la rapidité de l'amincissement n'y mettait obstacle. Seulement, chez les plus volatils, intervient une propriété qui ramène les chances de déchirement, et qui paraît consister (§ 257) en un défaut de cohésion dans les couches superficielles.

Notre théorie permet, on a pu s'en convaincre, d'expliquer d'une manière satisfaisante tous les phénomènes observés dans les expériences précédemment décrites; jusqu'ici cependant elle est encore trop hypothétique, mais nous allons voir de nouveaux faits se grouper autour d'elle, et lui donner, j'espère, un appui solide.

§ 260. Avant d'exposer ces nouveaux faits, je dois, pour compléter ce qui concerne nos petites calottes, mentionner un phénomène fort curieux que m'ont présenté celles de la solution de savon de Marseille. Ainsi que je l'ai dit (§ 248), ces calottes deviennent entièrement noires après deux heures au maximum, et persistent ensuite, en cet état, quelquefois au-delà de vingt-quatre heures; or, dans ces calottes si persistantes, j'ai constaté avec surprise une diminution progressive et continue du diamètre, de sorte qu'elles finissent par s'annuler complétement; pendant cette diminution graduelle, la lame demeure toujours noire. Il faut conclure de là que la descente du liquide est sans cesse compensée par le resserrement de la calotte; c'est ce qui explique la longue durée de celle-ci.

L'un des principaux arguments par lesquels on a cherché à prouver l'impossibilité de l'état vésiculaire dans la vapeur d'eau visible, consiste en ce que l'air emprisonné dans l'intérieur d'une vésicule si minime serait soumis, de la part de la lame, à une pression considérable, (§ 118), et, par suite, passerait graduellement à travers cette lame, de sorte que la vésicule se réduirait bientôt à une gouttelette pleine; or, on le voit, mes calottes noires de savon de Marseille réalisent ce passage graduel de l'air intérieur à travers l'enveloppe liquide. A la vérité, si la vapeur d'eau visible était à l'état vésiculaire, les enveloppes ne seraient évidemment pas noires, et auraient conséquemment une épaisseur beaucoup plus grande que les lames qui constituent les calottes dont il s'agit; mais, d'autre part, la pression sur l'air intérieur des vésicules d'eau serait plus de mille fois aussi forte que dans nos calottes récemment formées.

§ 261. Je passe maintenant aux nouveaux faits annoncés plus haut. J'ai cherché d'abord à établir, par des expériences directes, l'existence de la viscosité propre des couches superficielles, et les différences qu'elle présente d'un liquide à un autre. Voici le mode d'expérimentation que j'ai adopté, et qui m'a parfaitement réussi.

Au centre d'une capsule cylindrique en verre d'environ 11 centimètres de diamètre intérieur et 6 de profondeur est fixé un pivot de $2\frac{1}{2}$ centimètres de hauteur, portant une aiguille aimantée; celle-ci, en forme de losange très-allongé, comme à l'ordinaire, a 10 centimètres de longueur, 7^{mm} de largeur en son milieu, et à peu près $0^{mm},3$ d'épaisseur; la durée de chacune de ses petites oscillations sous la seule influence du magnétisme de la terre, est approximativement de $1'',7$. La capsule est munie de vis calantes afin qu'on puisse rendre le pivot vertical, et tout le système est placé sur une table devant une fenêtre exposée au Nord. Un petit chevalet en fil de laiton, servant de repère, pince le bord de la capsule au point situé dans le méridien magnétique, du côté du Sud; un autre chevalet semblable se trouve du côté Est à 90° du précédent, et il y en a un troisième entre eux à 5° du premier, de sorte que de ce troisième chevalet au chevalet Est, la distance angulaire est de 85°. Enfin une bande de papier divisée en degrés est collée sur la paroi extérieure de la capsule, à partir du chevalet Sud et allant vers l'Ouest.

Tout étant bien réglé, lorsqu'on veut procéder à une expérience, on verse dans la capsule du liquide à essayer, jusqu'à ce qu'il affleure simplement la face inférieure de l'aiguille; on s'assure d'ailleurs, en regardant à travers la paroi de la capsule, que la face dont il s'agit est, aussi exactement que possible, dans le prolongement de la surface du liquide, et que de petites bulles d'air n'y sont point adhérentes. Cela fait, on amène, au moyen d'un barreau aimanté, la pointe de l'aiguille qui était dirigée vers le Sud, exactement en face du chevalet Est, et on l'y maintient en posant le barreau sur un support extérieur, à la hauteur de l'aiguille et près de la capsule ; on attend quelques moments pour que la surface du liquide soit redevenue immobile, puis on enlève brusquement le barreau, en le retirant dans le sens de la longueur de l'aiguille, et l'on compte le temps qu'emploie cette dernière pour atteindre le chevalet suivant, c'est-à-dire pour parcourir un angle de 85° ; enfin on note l'angle qu'elle décrit, en continuant sa course, au delà du méridien magnétique, angle qu'on mesure à l'aide des divisions de la bande de papier. On ne compte le temps que jusqu'à 85° du point de départ, et non jusqu'au méridien magnétique, parce qu'avec certains liquides visqueux, l'aiguille ralentit tellement sa marche en approchant de ce dernier point, que l'instant où elle l'atteint ne peut être précisé.

On ajoute alors du même liquide jusqu'à deux centimètres environ au-dessus de l'aiguille, puis, saisissant cette dernière avec une pince en laiton, on la retourne dans l'intérieur du liquide, on fait sortir de la chape la bulle d'air qui s'y trouve engagée, en l'absorbant avec une pipette, on replace l'aiguille sur le pivot, et l'on effectue les déterminations de durée et d'angle comme ci-dessus.

En général, lorsque l'aiguille, soit sur la surface, soit dans l'intérieur du liquide, dépasse le méridien magnétique, elle se borne à y revenir ensuite lentement pour s'y arrêter.

Dans ces expériences, mon fils exécutait la manœuvre du barreau, et observait l'aiguille ; il prononçait un premier *tope* à l'instant où il enlevait le barreau, et un second *tope* à l'instant où la pointe de l'aiguille passait devant le repère suivant. De mon côté, tenant près de l'oreille une montre qui battait les cinquièmes de seconde, je pouvais estimer le temps du parcours à moins d'un dixième de seconde près. Chaque observation était répétée en général dix fois, et l'on prenait la moyenne des résultats, lesquels étaient toujours très-concordants. Ajoutons que lorsqu'il s'agissait de liquides volatils ou absorbants, on recouvrait la capsule d'une cloche en verre, à travers laquelle on observait, et que, dans le cas des solutions aqueuses, on appliquait, à l'intérieur de cette cloche, des morceaux de papier à filtre imbibés d'eau et placés de manière à ne pas empêcher la vue du parcours de la pointe considérée de l'aiguille ; dans ce cas aussi, la capsule était posée sur une assiette dans laquelle on versait un peu d'eau.

§ 262. Commençons par les résultats relatifs à l'eau distillée ; ils ont été obtenus à la température de 18° à 19°.

Sur la surface de ce liquide, la durée du parcours de l'angle de 85° a été trouvée, comme moyenne de dix observations, égale à 4",59; la plus petite et la plus grande des valeurs partielles étaient respectivement 4",5 et 4",7.

A l'intérieur du liquide, dix observations aussi ont donné, en moyenne, pour la durée du même parcours, 2",37 ; les valeurs partielles extrêmes étaient 2",3 et 2",5.

Ainsi, bien que, sur la surface, une seule des faces de l'aiguille frotte contre l'eau, tandis qu'à l'intérieur les deux faces frottent simultanément et que, par suite, l'aiguille semble devoir rencontrer une résistance double, cependant elle marche près de deux fois moins vite sur la surface qu'à l'intérieur. On doit donc conclure de là que la surface de l'eau oppose une résistance particulière, qu'il faut bien attribuer à une viscosité propre de la couche superficielle de ce liquide.

A la vérité, dans l'intérieur, l'ensemble de l'aiguille et de sa chape perd une petite partie de son poids, et conséquemment appuie un peu moins sur la pointe du pivot; mais, d'autre part, la chape frotte alors par toute sa surface contre l'eau, et, en outre, la tranche de l'aiguille, tranche qui a, comme je l'ai dit, $0^{mm},3$ de hauteur, pousse directement le liquide, d'où naissent des résistances bien plus que suffisantes pour compenser la légère diminution du frottement à la pointe.

D'ailleurs ce n'est pas tout. Sur la surface, l'aiguille, en continuant sa course, a décrit, en moyenne, au delà du méridien magnétique, un angle de près de 8°, tandis qu'à l'intérieur, malgré sa vitesse plus grande, elle n'a dépassé le méridien magnétique que de $3^\circ\frac{1}{2}$. Ces faits en apparence contradictoires m'ont beaucoup étonné d'abord; mais je n'ai pas tardé à en avoir l'explication, et ils m'ont fourni une preuve nouvelle de la forte viscosité superficielle de l'eau : on a recommencé l'expérience sur la surface, mais après avoir saupoudré celle-ci d'un léger nuage de lycopode; alors on a reconnu que cette surface tout entière tournait en même temps que l'aiguille[1], seulement avec une vitesse moindre; c'est donc la couche superficielle qui, en tournant ainsi, entraîne l'aiguille si loin au delà du méridien magnétique, et dès lors il est

(1) On verra (§ 286) que le mouvement de toute la surface de l'eau produit par celui d'un corps placé sur cette surface, avait déjà été constaté.

tout simple qu'à l'intérieur du liquide, où cette action n'existe pas, l'aiguille n'atteigne qu'une distance beaucoup plus petite.

J'ai dit que la surface tourne moins vite que l'aiguille; c'est qu'elle a à vaincre, sur toute son étendue, le frottement contre le liquide sous-jacent. En observant le lycopode, on constate, le long du bord antérieur de chacune des moitiés de l'aiguille, un courant allant de la chape à la pointe; et, en effet, l'aiguille ne pouvant glisser sur la couche superficielle à cause de la résistance de celle-ci, et possédant assez de force pour marcher malgré cet obstacle, il faut bien que les parties de la couche en question sur lesquelles elle agit immédiatement soient déviées et forment les courants dont j'ai parlé.

Enfin j'ai réfléchi qu'en entravant la rotation de la couche superficielle, on augmenterait la résistance au mouvement de l'aiguille, et que, par suite, on ralentirait encore ce dernier. J'ai donc fait construire deux petites cloisons rectangulaires en verre, propres à être installées dans la capsule suivant des directions allant de la paroi de celle-ci vers l'axe. Ces cloisons ont l'une et l'autre 40^{mm} de longueur, 12 de hauteur et 2 d'épaisseur; chacune d'elles est fixée à un fil de laiton ployé en forme de chevalet, qui pince le bord de la capsule, mais qui s'élève au-dessus de ce bord, de sorte qu'on a la faculté de descendre plus ou moins la cloison dans le liquide. Les deux cloisons ont été placées à l'opposé l'une de l'autre, la première dans la partie Sud de la capsule, à 42° environ à l'Ouest du méridien magnétique, et la seconde, par conséquent, dans la partie Nord, à 42° à l'Est de ce même méridien; enfin, pour qu'elles ne pussent exercer aucune action capillaire sur l'aiguille, on les a enfoncées jusqu'à ce que leur petite surface supérieure affleurât celle de l'eau. Dans ces conditions, la durée moyenne du parcours des 85°, sur la surface, s'est élevée à 6",44; alors aussi l'aiguille n'a plus dépassé le méridien magnétique.

Ces expériences ne laissent, on le voit, aucun doute sur l'existence, dans la couche superficielle de l'eau, d'une viscosité propre, supérieure de beaucoup à la viscosité de l'intérieur du même liquide, et si l'on considère que l'épaisseur de la couche superficielle d'un liquide est égale au rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire et conséquemment d'une excessive petitesse, on devra conclure des faits ci-dessus que la viscosité propre de la couche superficielle de l'eau est extrêmement grande. Remarquons ici que cette couche si mince doit entraîner dans sa rotation le liquide sous-jacent jusqu'à une certaine profondeur, de sorte que la masse totale qui tourne excède, en réalité, de beaucoup celle de la couche en question; c'est ce qui explique comment cette masse possède assez de vitesse acquise pour emporter l'aiguille au delà du méridien magnétique. Ajoutons que, par suite de son excessive minceur, la couche superficielle ne pourrait probablement opposer, à elle seule, qu'une faible résistance au mouvement de l'aiguille, et qu'une grande partie de la résistance observée doit être due à l'entraînement de la masse en question.

§ 263. J'ai essayé ensuite la glycérine de Price. Ici, à cause de la forte viscosité intérieure, le frottement soit d'une des faces, soit des deux faces de l'aiguille contre le liquide, devait produire des résistances considérables, et les durées devaient conséquemment être beaucoup plus grandes qu'à l'égard de l'eau. Je dois ajouter que les expériences ont été faites en Janvier, à la température de 15°, et qu'à cette température peu élevée, la glycérine est beaucoup plus visqueuse qu'en été. On n'a fait que deux observations sur la surface, et deux à l'intérieur.

Dans le premier cas(1), les valeurs de la durée ont été 36′ et 35′ 30″; dans le second, elles ont été l'une et l'autre de 19′ 30″.

Ainsi, pour la glycérine, comme pour l'eau, la vitesse du parcours de l'angle de 85° est beaucoup plus grande à l'intérieur que sur la surface, d'où il faut conclure de même à l'existence, dans la couche superficielle, d'une viscosité propre énergique.

Quant à l'angle au delà du méridien magnétique, il est nul, tant sur la surface qu'à l'intérieur, par suite des faibles vitesses de l'aiguille; celle-ci atteint simplement ce méridien, en approchant duquel sa marche devient d'une extrême lenteur.

Pour s'assurer si la couche superficielle tournait avec l'aiguille, on n'a pas employé le lycopode, dont il eût été difficile de débarrasser ensuite la glycérine; on a d'abord ramené l'aiguille à son point de départ, puis, pendant qu'elle y était maintenue, on a déposé sur la surface du liquide, dans le méridien magnétique et à 14^{mm} environ de la paroi de la capsule, un petit fragment de feuille d'or; ensuite, après avoir recouvert l'appareil de la cloche, on a rendu la liberté à l'aiguille, et l'on a observé la paillette. A peine l'aiguille avait-elle parcouru 1° ou 2°, qu'on a vu la paillette se mettre en mouvement, comme si elle était repoussée; après le parcours des 85° de l'aiguille, cette même paillette avait décrit, vers l'Ouest, un arc d'environ 30°. La couche superficielle de la glycérine

(1) Pour éviter autant que possible l'absorption de l'humidité de l'air, on avait enduit de glycérine l'intérieur de la cloche, sauf la portion à travers laquelle on devait observer.

tourne donc, comme celle de l'eau, en même temps que l'aiguille, et aussi avec une vitesse moindre.

§ 264. Avec la solution saturée de carbonate de soude, à la température de 17°, les durées, obtenues chacune par la moyenne de huit observations très-concordantes, ont été : sur la surface 8″,04, et à l'intérieur 4″,59. Sur la surface, l'aiguille a dépassé d'environ 6° le méridien magnétique, et, à l'intérieur, elle l'a simplement atteint. Pour l'essai de la rotation de la couche superficielle, on a eu recours, comme ci-dessus, à la paillette d'or; celle-ci a commencé à se mouvoir en même temps que l'aiguille, et a décrit un arc d'environ 30°. La conclusion est donc encore la même.

Je ferai remarquer que la durée 4″,59 du parcours des 85° à l'intérieur de cette solution, est précisément égale à celle que nous avons trouvée plus haut pour le même parcours sur la surface de l'eau distillée; or, ainsi que je l'ai dit, à l'intérieur de notre solution l'aiguille s'arrête au méridien magnétique; c'est donc une preuve nouvelle que, sur la surface de l'eau, l'aiguille ne va au delà de ce méridien que parce qu'elle est entraînée par le mouvement de la couche superficielle.

§ 265. Avec la solution saturée d'azotate de potasse, on a obtenu, par la moyenne de dix observations, à la température de 19° : sur la surface, durée 4″,41, angle au delà du méridien magnétique $5°\,\frac{1}{2}$; à l'intérieur, durée 2″,38, angle 3°; donc toujours même conclusion; on a jugé inutile de faire l'essai de la paillette d'or.

§ 266. En soumettant aux mêmes essais la solution saturée de chlorure de calcium, on a vu la durée, sur la surface, aller progressivement en augmentant : elle s'est élevée, en six observations, de 15″ à 21″. Soupçonnant que ce résultat pouvait provenir d'une faible action chimique exercée sur l'aiguille, action donnant lieu à un composé de fer qui, balayé sur la surface par l'aiguille, accroîtrait la viscosité superficielle, on a enduit d'un vernis à la gomme laque l'aiguille, ainsi que le pivot jusque près de la pointe, puis on a recommencé. Alors, en effet, l'augmentation ne s'est plus montrée, et l'on a eu, en moyenne, à la température d'environ 19° : sur la surface, durée 14″,85, angle $2°\frac{1}{2}$; à l'intérieur, durée 8″;52, angle 0°; ainsi, même conclusion également.

J'ai cru pouvoir me borner, à l'égard de la première catégorie, aux cinq liquides précédents; d'ailleurs les acides sulfurique, azotique et tartrique, ainsi que l'ammoniaque, auraient fortement agi sur l'aiguille ou sur la couche de vernis dont on l'aurait recouverte. Je passe actuellement à la deuxième catégorie.

§ 267. Voyons, en premier lieu, ce qui concerne l'alcool. Les expériences(1) ont donné, avec ce liquide, pour la durée moyenne du parcours des 85°, sur la surface, 1″,48, et, pour celle du même parcours à l'intérieur, 3″,30. Ici donc, à l'inverse des liquides précédents, c'est sur la surface que la durée est de beaucoup la plus petite. L'angle décrit au delà du méridien magnétique a été, en moyenne, sur la surface, de $21°\frac{1}{2}$, et, à l'intérieur, de $3°\frac{1}{2}$. Les cloisons n'ont produit absolument

(1) Si l'on se borne à placer la cloche sur la capsule, le niveau du liquide baisse sensiblement, malgré cette précaution, pendant les essais, à cause de la volatilité de l'alcool, et cela influe surtout sur les angles. Afin d'écarter cet inconvénient, on a couvert l'intérieur de la cloche de papier à filtre imbibé d'alcool, en laissant à nu la portion nécessaire pour permettre l'observation; le tout était posé sur une assiette dans laquelle on a versé un peu d'alcool.

aucun effet; enfin le petit corps flottant[1] est demeuré immobile jusqu'à ce que l'aiguille vînt le heurter.

Il suit évidemment de ces résultats que, dans l'alcool, la viscosité de la couche superficielle ne surpasse aucunement celle de l'intérieur du liquide, et nous aurons à décider si elle ne lui est pas inférieure. Il suit encore des mêmes résultats que si l'aiguille, sur la surface, se transporte au delà du méridien magnétique, c'est bien en vertu de sa propre vitesse acquise. Les expériences ci-dessus ont été effectuées à la température de 17° à 18°.

Le jour où ont été faites sur l'eau distillée les observations du § 262, on a effectué, immédiatement après, une nouvelle détermination de la durée et de l'angle à l'intérieur de l'alcool, afin de pouvoir comparer ces éléments à ceux de l'eau dans des circonstances identiques; on a trouvé ainsi la durée égale à 2″,66, et l'angle égal à $2° \frac{1}{2}$; la durée, on le voit, est un peu plus grande et l'angle un peu plus petit qu'à l'égard de l'eau dans les mêmes conditions; la résistance intérieure de l'alcool au mouvement de l'aiguille paraît donc être un peu supérieure à celle de l'eau; on sait d'ailleurs que l'alcool s'écoule moins vite que l'eau par un tube étroit; mais cela tient sans doute à ce que l'alcool adhère aux solides plus fortement que l'eau. Quant aux différences entre les valeurs ci-dessus relatives au premier de ces liquides et celles précédemment obtenues, j'y reviendrai plus loin.

§ 268. Voici les résultats avec l'essence de térébenthine, obtenus le même jour qu'avec l'alcool : durée moyenne sur la surface, 1″,40; à l'intérieur, 3″,43;

(1) Ce n'était pas une paillette d'or : ces paillettes déposées sur l'alcool et sur quelques autres liquides tels que l'essence de térébenthine, l'éther, etc., descendent invariablement au fond; on y a substitué un fragment d'aigrette de graine.

angle moyen au delà du méridien magnétique, sur la surface, $22^{\circ}\frac{1}{2}$; à l'intérieur, 1°. Comme avec l'alcool, l'aigrette attend, sans quitter sa place, que l'aiguille vienne la heurter; d'après ce dernier résultat, on a jugé inutile de faire usage des cloisons. La viscosité de la couche superficielle de l'essence de térébenthine ne l'emporte donc pas non plus sur celle de l'intérieur.

La comparaison des valeurs ci-dessus avec celles qui concernent l'alcool dans les mêmes conditions, nous conduit à une conséquence importante : la durée 3″,43 et l'angle 1° à l'intérieur de l'essence, sont l'une un peu plus grande et l'autre beaucoup plus petit que la durée 3″,30 et l'angle $3^{\circ}\frac{1}{2}$ à l'intérieur de l'alcool; il paraît donc que la viscosité intérieure est plus énergique dans l'essence. Maintenant rappelons-nous que, sur la surface, l'aiguille doit vaincre, par sa face en contact avec le liquide, la viscosité intérieure de celui-ci; conséquemment si la viscosité de la couche superficielle était, dans chacun des deux liquides, simplement égale à la viscosité intérieure, l'aiguille devrait éprouver aussi une résistance plus grande à la surface de l'essence qu'à celle de l'alcool; or, on l'a vu, il n'en est pas ainsi : sur la surface, la durée a été un peu moindre et l'angle un peu plus grand pour l'essence que pour l'alcool; il semble dès lors nécessaire d'admettre, dans la couche superficielle de l'essence, une mobilité particulière qui diminue la résistance, et nous arrivons ainsi à cette déduction probable que, parmi les liquides de la deuxième catégorie, l'essence de térébenthine au moins a, dans sa couche superficielle, une viscosité plus faible que dans son intérieur. Pour abréger le langage, j'exprimerai le fait en disant que la couche superficielle de ce liquide possède un *excès négatif* de viscosité. C'est, du reste, un point sur lequel je reviendrai bientôt.

§ 269. Dans l'huile d'olive, on pourrait croire, au premier aperçu, qu'on retrouve un faible excès positif. En effet, les résultats avec ce liquide, à la température de 15°, ont été, en moyenne : durée sur la surface, 30″,30, et, à l'intérieur, 79″,54 ; dans les deux cas, l'aiguille atteint simplement le méridien magnétique ; mais, en présence des cloisons, la durée sur la surface a été de 31″,42, c'est-à-dire quelque peu supérieure à celle obtenue sans leur emploi ; enfin la paillette d'or s'est mise en marche, mais seulement après un parcours de l'aiguille de plus de 30°, et elle ne s'était éloignée que de 4° du méridien magnétique à la fin du parcours des 85°.

Cependant le petit excès positif que semblent révéler ces expériences n'est pas réel : on a ajouté un peu d'huile dans la capsule de manière que l'aiguille fût plongée dans le liquide, mais seulement à 1^{mm} au-dessous de la surface, et l'on a refait, dans ces conditions, l'essai de la paillette. On a vu alors celle-ci se déplacer dès que l'aiguille a commencé à se mouvoir ; seulement elle marchait avec beaucoup plus de lenteur ; elle s'est arrêtée en même temps que l'aiguille lorsque cette dernière a atteint le méridien magnétique, et elle n'avait parcouru que 20°. La hauteur de l'huile au-dessus de l'aiguille ayant été successivement augmentée, l'effet a diminué, mais, même pour une hauteur de deux centimètres, il était encore très-notable : la paillette partait lorsque l'aiguille avait décrit environ 30°, et elle se déplaçait de 9°.

Il résulte de ces faits que, dans le cas d'un liquide très-visqueux comme l'huile, l'aiguille entraîne avec elle une masse considérable qui pousse le liquide devant elle, et que cette action se fait sentir immédiatement à une grande distance en avant de l'aiguille. Si l'effet est moins prononcé quand l'aiguille est simplement sur la surface, c'est qu'alors une seule de ses faces agit pour entraîner et pousser le liquide. On le voit donc, la viscosité propre de la couche superficielle de l'huile n'est pour rien dans le mouvement de la paillette et dans le petit retard apporté par les cloisons, et l'excès positif de ce liquide n'est qu'une apparence due aux effets de la viscosité intérieure (1). Bien plus, la rapidité de l'amincissement des calottes (§ 247) doit faire présumer que l'huile a, au contraire, un excès négatif.

Dans les liquides peu visqueux, tels que l'eau, l'alcool, etc., l'aiguille doit communiquer aussi un certain mouvement aux portions voisines, et il était important de savoir ce que donneraient, avec ces liquides, les mêmes expériences. On a essayé d'abord l'eau distillée; or, quand l'aiguille était plongée de 1^{mm}, elle n'a imprimé de mouvement à la paillette qu'au moment où elle passait dessous; mais pendant qu'elle revenait lentement au méridien magnétique après avoir décrit environ $2°$ au delà, la paillette a continué à marcher, et a parcouru $30°$. Tout effet cesse lorsqu'il y a au-dessus de l'aiguille une hauteur d'eau de 7^{mm}. Dans l'alcool, les résultats ont été analogues; seulement, à 1^{mm} au-dessous de la surface, comme l'aiguille dépassait de beaucoup le méridien magnétique, le petit corps flottant l'accompagnait jusqu'à l'extrémité de sa course, puis allait encore un peu plus loin; en outre, pour qu'il n'y eût plus d'action, il a fallu une hauteur d'alcool de 9^{mm}. Ainsi, avec les liquides

(1) Le même entraînement et une semblable poussée doivent avoir eu lieu à l'égard de la glycérine (§ 263); mais, avec ce dernier liquide, l'excès positif était nettement accusé par la circonstance que la durée sur la surface était beaucoup plus grande que dans l'intérieur, et par le mouvement considérable de la paillette.

peu visqueux, soit qu'ils aient, comme l'eau, un excès positif, soit que, comme l'alcool, ils n'en possèdent pas, la masse entraînée par l'aiguille n'exerce aucune impulsion sensible en avant, de sorte qu'elle n'influe nullement sur les déductions tirées des essais de la paillette et des cloisons.

Ces derniers faits m'ont suggéré l'idée d'une expérience propre à mettre complétement hors de doute l'absence d'excès positif dans la couche superficielle de l'huile : je me suis dit que si l'on recouvrait l'eau de la capsule d'une mince couche d'huile sur la surface supérieure de laquelle l'aiguille exécuterait son mouvement, les effets décrits plus haut de la viscosité intérieure de l'huile ne pourraient se produire, et que, par conséquent, si l'huile n'a pas d'excès positif, la paillette resterait immobile. Or l'expérience a pleinement confirmé cette prévision; seulement, à ma grande surprise, j'ai reconnu que si la couche d'huile est très-mince, l'excès positif de l'eau se fait sentir : la paillette alors part en même temps que l'aiguille, et décrit un grand angle. L'épaisseur d'huile pour laquelle la paillette ne bouge plus du tout, est d'environ 1^{mm}.

§ 270. Pour l'éther sulfurique[1], j'ai trouvé, à la température de 16° : sur la surface, durée 1'',12, angle au delà du méridien magnétique 47° ; à l'intérieur, durée 1'',49, angle 12°. L'expérience de l'aigrette présente des difficultés, parce que ce petit corps, avant qu'on ait rendu la liberté à l'aiguille, se promène constamment à la surface du liquide; cependant, en lâchant l'aiguille le plus tôt possible après avoir placé l'aigrette, on a pu constater

(1) Ici, plus encore qu'avec l'alcool, la volatilité du liquide tend à produire un abaissement du niveau. Le moyen employé à l'égard de l'alcool (voir la première note du § 267) aurait exposé l'observateur à

par plusieurs essais que celle-ci était simplement heurtée. La couche superficielle de l'éther ne possède donc non plus aucun excès positif.

Quant aux mouvements en apparence spontanés de l'aigrette, ils proviennent, sans aucun doute, de l'évaporation du liquide, bien qu'on place, à chaque essai, la cloche sur l'appareil.

§ 271. Le sulfure de carbone(1) a fourni, à la température de 16° : sur la surface, durée 1″,20, angle au delà du méridien magnétique 36°; à l'intérieur, durée 2″,0, angle 8°. Avec l'aigrette, mêmes difficultés et même résultat que pour l'éther; même conclusion par conséquent, savoir absence d'excès positif.

Dans le Mémoire résumé au § 167, M. Van der Mensbrugghe attribue les mouvements, en apparence spontanés, des parcelles flottantes, à ce que l'évaporation du liquide ne s'effectue pas d'une manière parfaitement égale dans tous les azimuts autour d'une même parcelle, d'où résultent de petites inégalités de température, et, par suite, de tension. A l'appui de cette explication, il cite, entre autres, le fait suivant : si l'on recouvre d'une plaque de verre la moitié d'une capsule contenant du sulfure de carbone sur lequel flottent des particules solides, on voit celles de la portion ainsi abritée marcher vers la portion découverte, où l'évaporation est libre.

§ 272. Avant de rapporter les résultats des mêmes épreuves sur les liquides de la troisième catégorie, reve-

respirer trop de vapeur d'éther; on a donc procédé de la manière suivante: on a versé un peu trop de liquide dans la capsule, et l'on a simplement recouvert celle-ci de la cloche, puis, durant la série des essais, on a enlevé de temps à autre la cloche pour observer l'affleurement de l'aiguil.e, et, parmi les résultats partiels obtenus, on n'a conservé que ceux qui correspondaient à un affleurement régulier.

(1) Même procédé que pour l'éther.

nons à la question de l'excès négatif. Les faits qui m'ont conduit à admettre cette propriété peuvent paraître insuffisants; mais l'idée m'est venue d'un moyen simple, propre à la mettre en évidence à l'égard de l'alcool, si elle existait dans ce liquide : l'alcool, en effet, se mêle en toutes proportions à l'eau, laquelle possède, on l'a vu (§ 262), un grand excès positif; si donc on mêle avec soin à de l'eau une quantité convenable d'alcool, et si ce dernier liquide présente effectivement un excès négatif, celui-ci devra détruire l'excès positif de l'eau. Or c'est ce que l'expérience vérifie pleinement : on prépare un mélange à volumes égaux d'eau et d'alcool, et l'on effectue, sur ce mélange, l'essai de la paillette; on constate alors que celle-ci est simplement heurtée par l'aiguille.

La proportion d'alcool qui suffit pour produire la simple neutralisation de l'excès positif de l'eau, est inférieure à celle que je viens d'indiquer; mais, avec cette dernière, l'expérience est des plus faciles, tandis qu'avec des proportions plus faibles, elle présente des difficultés résultant de la perte d'alcool par évaporation à la surface du mélange.

Pour effectuer l'expérience ci-dessus, on a laissé la capsule découverte; de cette manière, si le mélange contenait trop d'alcool, la couche supérieure perdant de celui-ci par évaporation, devait arriver graduellement au point neutre; puis, l'évaporation continuant, l'excès positif de l'eau devait commencer à reparaître. Or c'est ce qui est arrivé : on a mesuré d'abord l'angle décrit par l'aiguille au delà du méridien magnétique; il était de 14°, et la paillette, essayée immédiatement après, a été simplement heurtée. Quelques minutes plus tard, l'angle n'était plus que de 12°, plus tard encore de 10°, et la paillette était toujours simplement heurtée. Pour l'angle de $9^\circ \frac{1}{2}$, la paillette a été poussée en avant quand l'aiguille en était à environ un degré ; enfin lorsque l'angle s'est trouvé réduit à 5°, la distance de l'aiguille à la paillette au moment où celle-ci commençait à se déplacer, a été de quatre degrés. Pendant la durée de ces essais, l'évaporation de l'alcool faisait baisser peu à peu le niveau du liquide ; mais on le rétablissait de temps à autre en introduisant, au moyen d'une pipette, à une certaine profondeur au-dessous de la surface, une quantité convenable du même mélange. La température était de 18°.

On ne doit pas conclure de cette expérience que l'angle qui correspond au point neutre est de 10° environ : l'aiguille, en parcourant son trajet, mêle plus ou moins la couche supérieure avec les couches sous-jacentes, et il en résulte une cause perturbatrice dont on ne peut évaluer l'influence.

Il faut donc nécessairement reconnaître que l'alcool et, à plus forte raison, l'essence de térébenthine, ont un excès négatif, c'est-à-dire que, dans chacun de ces liquides, la viscosité de la couche superficielle est moindre que la viscosité intérieure. On voit, de plus, que les excès négatifs dont il s'agit sont considérables.

§ 273. Enfin un moyen tout différent m'a permis non-seulement de constater encore l'existence des excès négatifs, mais même de déterminer approximativement les valeurs relatives de ces excès pour plusieurs liquides. On sait que les oscillations de l'aiguille aimantée sont régies par la même loi que celles du pendule ; les formules concernant le mouvement de ce dernier dans un milieu résistant, s'appliquent donc aussi au mouvement de notre aiguille sur ou dans un liquide. Si l'on admet que la résistance du milieu est proportionnelle au carré de la vitesse du pendule, l'équation différentielle du mouvement de celui-ci peut, on le sait encore, s'intégrer une première fois, et cette intégrale est :

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2amCe^{2am\theta} + \frac{2g\cos\theta}{a(1+4a^2m^2)} + \frac{4gm\sin\theta}{1+4a^2m^2}, \dots \quad [1]$$

dans laquelle θ est l'angle variable que fait le pendule avec la verticale, a la longueur du pendule simple correspondant, m la résistance pour l'unité de vitesse, g la gravité, et C la constante arbitraire.

Pour l'appliquer à notre aiguille, prenons pour origine des angles non la position de repos, c'est-à-dire le méridien magnétique, mais le point de départ de l'aiguille, c'est-à-dire la position à 90° de ce méridien, et désignons par ω l'angle variable ; on a ainsi $\theta = 90^\circ - \omega$; remplaçons de plus $2am$ par la seule lettre k; celle-ci représentera alors une quantité proportionnelle à la résistance; déterminons la constante arbitraire C par cette condition que, pour $\omega = 0$, la vitesse est nulle; enfin considérons ω comme représentant l'angle total décrit par l'aiguille jusqu'au point qu'elle atteint au delà du méridien magnétique, point pour lequel la vitesse est également nulle. Avec ces conventions, l'intégrale ci-dessus devient simplement :

$$\sin\omega + k\cos\omega - ke^{-k\omega} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [2].$$

Quand l'expérience a fait connaître, à l'égard d'un liquide, l'angle décrit par l'aiguille au delà du méridien magnétique sur la surface ou dans l'intérieur, il suffit d'ajouter 90° à cet angle pour avoir ω, ou l'angle total parcouru depuis le point de départ; portant alors cette valeur de ω dans l'équation [2], on en déduira par tâtonnement la valeur correspondante de k. Afin d'éviter la confusion, nous conserverons k pour la résistance sur la surface, et nous nommerons k' la résistance à l'intérieur.

Avant d'aller plus loin, je dois faire remarquer que notre formule ne peut déterminer k lorsqu'il s'agit de liquides à excès positif; avec ceux-ci, en effet, l'angle décrit sur la surface au delà du méridien magnétique est dû, en tout ou en partie (§ 262), à ce que l'aiguille est emportée par la couche superficielle. L'application complète de la formule [2] est donc restreinte aux liquides qui n'ont pas d'excès positif, c'est-à-dire à ceux sur lesquels la paillette ou l'aigrette attend simplement l'aiguille.

La résistance due à la viscosité intérieure doit, comme je l'ai déjà fait observer, être à peu près deux fois aussi grande lorsque l'aiguille se meut dans le liquide que lorsqu'elle se meut sur la surface, puisque, dans le premier cas, elle frotte par ses deux faces, tandis que, dans le second, elle ne frotte que par une seule; si donc, pour un certain liquide, l'excès superficiel était égal à zéro, ou, en d'autres termes, si la couche superficielle possédait la même viscosité que l'intérieur, on devrait avoir sensiblement, à l'égard de ce liquide, $k = \frac{1}{2}k'$; je dis sensiblement, parce que (§ 262) de petites causes, telles que l'action de la tranche de l'aiguille à l'intérieur du liquide, la perte de poids dans cette même condition, etc., altérent sans doute quelque peu cette égalité. Pour un liquide à excès négatif, on aura conséquemment

$$k < \frac{1}{2}k', \quad \text{ou} \quad k - \frac{1}{2}k' < 0\,;$$

or la formule [2] permet de calculer cette différence pour tous les liquides sans excès positif et sur lesquels l'aiguille dépasse le méridien magnétique; on peut donc, ainsi que je l'ai dit, constater l'existence des excès négatifs, et obtenir, en même temps, leurs valeurs relatives approchées.

§ 274. C'est ce que j'ai fait pour les quatre liquides alcool, essence de térébenthine, éther sulfurique et sulfure de carbone; en transportant dans la formule [2] les valeurs de ω déduites, pour ces liquides, des expériences des §§ 267 à 271, on a obtenu les résultats consignés dans le tableau suivant :

LIQUIDES.	VALEURS de k.	VALEURS de k'.	VALEURS de $k - \frac{1}{2}k'$.
Essence de térébenthine. .	2,34	57,28	— 26,30
Alcool	2,48	16,34	— 5,69
Sulfure de carbone . . .	1,24	7,11	— 2,31
Éther sulfurique	1,05	4,71	— 1,30

Ainsi les résultats de la formule confirment pleinement nos déductions précédentes : ils signalent des excès négatifs dans l'essence de térébenthine et dans l'alcool, et montrent que celui de l'essence est plus grand que celui de l'alcool; mais ils nous apprennent, en outre, que le sulfure de carbone et l'éther possèdent également des excès négatifs. Si l'on rapproche de ces résultats le fait de l'amincissement rapide des calottes des huiles grasses, ainsi que l'analogie des phénomènes, d'une part entre les calottes des acides lactique et acétique et celles d'essence de térébenthine et d'alcool, et, d'autre part, entre les calottes de benzine, de liqueur des Hollandais et de chloroforme, et celles d'éther et de sulfure de carbone (§ 247), on devra regarder comme bien probable que la propriété de présenter un excès négatif appartient à tous les liquides de la deuxième catégorie.

Dans le tableau ci-dessus, j'ai rangé les liquides suivant l'ordre décroissant de leurs excès négatifs; or cet ordre est aussi l'ordre décroissant de leurs viscosités intérieures, comme cela résulte des valeurs respectives des angles décrits par l'aiguille au delà du méridien magnétique à l'intérieur de chacun d'eux; si donc il est permis de tirer quelque conclusion de résultats relatifs à un nombre de liquides aussi restreint, nous dirons que l'excès négatif paraît être d'autant plus grand qu'il appartient à un liquide plus visqueux. S'il en est ainsi, les huiles grasses et l'acide lactique doivent avoir des excès négatifs plus considérables encore que celui de l'essence de térébenthine.

La petitesse des excès négatifs, ou, ce qui revient au même, la moins grande mobilité des couches superficielles dans le sulfure de carbone et dans l'éther, est, sans doute, la cause principale de la longueur relative des phases blanches dans les calottes de ces deux liquides. Il est vrai que le froid, qui doit encore amoindrir cette mobilité, raccourcit cependant, nous l'avons vu, les phases en question; mais, il ne faut pas l'oublier, deux causes opposées paraissent être alors en présence : d'une part la basse température des lames elles-mêmes, laquelle doit, en réalité, tendre à allonger les phases blanches, et, d'autre part, la diminution du petit reste d'évaporation, qui tend, au contraire, à les raccourcir (§ 253), et il se peut que cette dernière influence l'emporte sur la première.

Dans notre tableau, les valeurs des excès négatifs sont exprimées en fonction d'une unité qui n'est pas bien déterminée; il ne faut donc y voir que des valeurs relatives; et encore ne doit-on les regarder que comme des approximations même grossières. En effet, la formule d'où elles sont déduites est fondée sur une loi des résistances qui, on le sait, n'est pas rigoureuse (1); en second lieu, mon procédé de mesure des angles laisse à désirer, de sorte que je n'ai pas cru devoir pousser la précision, même dans les moyennes, au delà du demi-degré; d'ailleurs il y a une influence dont la formule ne pouvait tenir compte, et qui doit augmenter plus ou moins tous les angles : c'est qu'en vertu de sa vitesse acquise, la portion de liquide entraînée par l'aiguille (§ 269) emporte nécessairement cette dernière un peu au delà du point qui, sans cela, constituerait la limite de l'angle.

§ 275. Nous pouvons maintenant exposer les résultats des essais avec l'aiguille sur les liquides de la troisième catégorie. Ici encore nous aurons à constater des faits bien remarquables.

Voyons d'abord ce qui concerne la solution de savon de Marseille à $\frac{1}{40}$. Avec une solution qu'on venait de préparer, on a trouvé, à la température de 18° : sur la surface, durée 4",82, angle au delà du méridien magnétique 10°; à l'intérieur, durée 2",58, angle 5°.

Ces résultats s'accordent, on le voit, avec ceux des

(1) Coulomb a montré (*Mém. de l'Acad. des Sc. de Paris*, an IX de la République), par une suite nombreuse d'expériences, que, lorsqu'un plan solide se meut très-lentement dans le sens de sa surface à l'intérieur d'un liquide, la résistance est proportionnelle à la simple vitesse. Mais les vitesses qu'il emploie sont environ cinq fois moindres que la plus lente de celles de mon aiguille dans les liquides qui ont fourni les résultats du tableau. Pour avoir des résultats exacts avec les vitesses de mes expériences, il faudrait probablement considérer la résistance comme composée de deux termes, l'un proportionnel à la simple vitesse, l'autre au carré de cette vitesse; mais alors la formule ne serait sans doute pas susceptible d'intégration.

calottes pour accuser nettement une forte viscosité superficielle. Il était nécessaire, pour une raison que l'on comprendra plus loin, de les comparer à ceux que fournit l'eau distillée dans des conditions identiques; on a donc opéré le même jour sur l'eau distillée, et l'on a obtenu : sur la surface, durée 4″,93, angle 10° ; à l'intérieur, durée 2″,58, angle 5°.

Comme les observations de ce genre comportent inévitablement de petites erreurs dont il doit, en général, rester quelque chose dans les moyennes, on a recommencé, à une autre époque, en opérant aussi le même jour sur les deux liquides; la température était d'environ 21°. Les résultats ont été : avec la solution de savon, sur la surface, durée 4″,14, angle $6^\circ\frac{1}{2}$; à l'intérieur, durée 2″,32, angle $4^\circ\frac{1}{2}$; avec l'eau distillée, sur la surface, durée 4″,07, angle 8°; à l'intérieur, durée 2″,08, angle 4°.

Dans le premier de ces deux couples de séries, les résultats relatifs aux deux liquides n'ont guère différé entre eux ; dans le second, ils se sont un peu éloignés, ce qui tient sans doute aux erreurs inévitables des observations, surtout à l'égard de la durée à l'intérieur ; pour celle-ci, en effet, la vitesse de l'aiguille étant beaucoup plus grande, il était fort difficile de signaler avec précision l'instant du passage de la pointe en face du repère. Quoi qu'il en soit, on peut conclure de l'ensemble de ces mêmes séries que la présence de $\frac{1}{40}$ de savon ne change que faiblement la viscosité superficielle du liquide; nous verrons plus loin qu'elle paraît la diminuer un peu (§ 292).

L'alcool nous a déjà montré (§ 267) que, pour un même liquide, les valeurs des durées et des angles obtenues par des séries d'observations effectuées à des époques différentes peuvent s'éloigner très-notablement les unes des autres; l'eau distillée ainsi que la solution de savon en offrent de nouveaux exemples : pour l'eau, les séries du § 262 et celles que nous venons de rapporter ont donné, sur la surface, les valeurs respectives 4″,59, 4″,93 et 4″,07, et, à l'intérieur, 2″,37, 2″,58 et 2″,08; la solution de savon montre, on a pu le voir, des différences analogues. Disons ici, pour ne plus y revenir, que toutes ces différences tiennent aux variations du magnétisme de l'aiguille : pendant le long temps qu'a exigé l'ensemble de mes expériences, ce magnétisme a plus d'une fois diminué, et lorsque la diminution paraissait trop grande, on soumettait l'aiguille à une nouvelle aimantation. Aussi, quand il s'est agi de comparer un liquide à un autre, on a toujours eu soin d'opérer le même jour sur les deux.

Quant aux angles, il semble qu'ils devraient être, pour un même liquide, d'autant plus grands que les durées sont plus petites, puisque alors l'aiguille atteint le méridien magnétique avec plus de vitesse acquise soit en elle-même, soit dans les couches qu'elle a mises en mouvement; or c'est précisément le contraire qui a lieu en général, comme le montrent nos mesures. On peut, je crois, se rendre raison de cette singularité, en observant que lorsque l'aiguille est plus fortement aimantée, sa force directrice tend à annuler sa vitesse à une moindre distance au delà du méridien magnétique. Quelques exceptions me portent cependant à penser que parfois une autre influence, dont la nature m'échappe, agit plus ou moins sur les angles.

Bien qu'on obtienne si aisément d'énormes bulles avec une solution aqueuse de savon de Marseille, on ne parvient pas à en former, même de petites, avec une solution alcoolique de la même substance. C'est ce qu'il était facile de prévoir d'après nos résultats, sachant que l'alcool possède un excès négatif considérable.

§ 276. La solution de savon mou de ménage à $\frac{1}{30}$ (voir la deuxième note du § 248), a donné, à la température de 19° : sur la surface, durée 4″,40, angle 6° $\frac{1}{2}$; à l'intérieur, durée 2″,38, angle 5°; ainsi même conclusion quant à la viscosité superficielle.

§ 277. Avec la solution de savon de colophane (voir la troisième note du § 248), on a trouvé, à la température de 18° : sur la surface, durée 7″,30, angle au delà du méridien magnétique 5°; à l'intérieur, durée 4″,48, angle 0°; arc décrit par la paillette 26°. La solution de savon de colophane a donc aussi une viscosité superficielle à excès positif.

§ 278. Arrivons au liquide le plus extraordinaire de tous ceux que j'ai examinés; je veux parler de la solution de saponine. Celle que j'ai d'abord essayée contenait $\frac{1}{80}$ de saponine, et ne paraissait pas plus visqueuse que l'eau pure; or, sur sa surface, l'aiguille, amenée, comme toujours, à 90° du méridien magnétique, puis abandonnée à elle-même, n'a pas quitté sa position, malgré des coups frappés sur la table, absolument comme si le liquide s'était recouvert d'une pellicule de nature solide. Cependant la surface présentait le poli parfait d'un liquide, et, de plus, en l'agitant légèrement avec l'extrémité d'une spatule ou d'un fil métallique, on n'a pu reconnaître la moindre trace de pellicule. Des solutions à $\frac{1}{100}$, et même à $\frac{1}{160}$, ont présenté les mêmes résultats.

On a effectué l'essai de l'aiguille à l'intérieur du liquide avec la solution d'un second échantillon de saponine, le premier ayant été épuisé par d'autres expériences. Ce second échantillon n'était pas tout à fait aussi excellent : pour obtenir les meilleurs résultats, il a fallu le dissoudre dans une moindre quantité d'eau; la solution que j'ai employée était à $\frac{1}{60}$; elle donnait des bulles de 12 à 13 centimètres, et, sur sa surface, l'aiguille placée à 90° du méridien magnétique demeurait de même parfaitement immobile.

A l'intérieur, la durée du parcours des 85° a été 2'',72, et l'angle au delà du méridien magnétique 2°; la température était de 16°. On a répété aussi, le même jour, l'essai à l'intérieur de l'eau distillée, et l'on a obtenu : durée 2'',66, angle 2°. Ces résultats s'éloignent déjà bien peu les uns des autres, et l'on doit en conclure qu'avec la solution à $\frac{1}{100}$ du premier échantillon, ils auraient été plus rapprochés encore; on peut donc admettre que la viscosité intérieure d'une bonne solution de saponine est sensiblement égale à celle de l'eau pure.

Les observations rapportées plus haut ne permettent guère de considérer la résistance au mouvement de l'aiguille sur la surface comme résultant de la formation d'une pellicule; on est donc conduit à admettre, dans la solution de saponine, une viscosité extrêmement forte, et c'est ce que confirment les expériences suivantes :

Si la surface se recouvrait d'une pellicule, celle-ci devrait provenir soit de l'évaporation de l'eau, soit d'une action de l'oxygène de l'air sur la saponine, action que, du reste, la chimie ne signale point; or j'ai abandonné pendant trois jours une solution à $\frac{1}{100}$ du premier échantillon dans une capsule sur laquelle un papier était simplement posé pour abriter le liquide de la poussière, et, après ce long temps, on n'a remarqué aucun changement dans la surface.

En second lieu, lorsqu'une bulle que l'on gonfle avec la pipe vient à se briser, elle ne disparaît pas comme le ferait une bulle de savon : on voit tomber de l'orifice de la pipe une masse allongée dans le sens vertical, resserrée dans le sens horizontal, et constituée par une sorte de membrane chiffonnée d'un blanc mat. Si l'on reçoit cette masse sur le liquide, elle y forme aussitôt un ensemble de calottes irrégulières agglomérées, et, si l'on examine rapidement celles-ci, on reconnaît que leur aspect mat tient à une foule de petites masses d'air très-allongées qui semblent emprisonnées dans les lames; mais bientôt ces petites masses disparaissent, les calottes se régularisent plus ou moins et se montrent tout à fait transparentes; enfin si l'on crève ces mêmes calottes, aucune trace de pellicule ne reste à la surface du liquide. Dans cette expérience, on le comprend, la bulle se détache de l'orifice, et alors, en vertu de la pression qu'elle exerce, chasse, par l'ouverture ainsi formée, l'air qu'elle renfermait; mais, par suite de la rigidité de ses couches superficielles, elle ne peut revenir sur elle-même qu'en se plissant et emprisonnant ainsi de petites masses d'air dans une grande quantité de canaux cylindriques; seulement on ne voit pas bien pourquoi ce plissement s'opère de façon à ne resserrer la bulle que dans le sens horizontal. Lorsque cette espèce de membrane plissée tombe sur le liquide, les petits canaux ci-dessus se brisent les uns après les autres, et enfin, quand on crève les petites calottes, tout reprend parfaitement son aspect liquide.

On le voit donc, ces apparences de membranes sont simplement dues à une énorme viscosité des couches superficielles, et non à la génération d'une véritable pellicule solide. Voici encore quelques faits singuliers dépendant des mêmes causes :

On gonfle, à l'orifice de la pipe, une bulle d'environ 6 centimètres de diamètre, puis on aspire par le tuyau ; la bulle alors, au lieu de revenir sur elle-même dans tous les sens, ne diminue que dans le sens latéral, et, si l'on arrête à temps l'aspiration, se transforme en un cône ayant l'orifice pour base. La surface de ce cône est d'abord ridée, puis devient parfaitement unie, et la lame persiste ensuite dans le même état avec sa forme conique.

On dépose à la surface du liquide une bulle d'environ 4 centimètres de diamètre, et, maintenant l'orifice de la pipe en contact avec la calotte dans laquelle cette bulle s'est transformée, on souffle pour en augmenter les dimensions, jusqu'à ce qu'elle se brise. Aussitôt la lame s'affaisse sur le liquide en plusieurs grandes portions, dont chacune demeure séparée de la surface du liquide par une lame d'air, et se rapetisse peu à peu comme si elle rentrait dans la masse par la portion de son bord restée adhérente, en employant plusieurs secondes à effectuer ce retrait. Quand tout a disparu, la surface se montre aussi parfaitement liquide qu'auparavant.

La solution de saponine est certainement le liquide qui fournit la mousse la plus abondante, et peut-être la plus persistante : il suffit de dissoudre dans l'eau $\frac{1}{4000}$ de bonne saponine pour que le liquide, agité dans un flacon, donne encore une mousse de 35^{mm} de hauteur, qui exige plusieurs jours pour son annulation complète. D'autre part, l'alcool n'exerce aucune action chimique sur la saponine ; il ne la dissout même, à froid, en quantité notable qu'à la faveur de l'eau. Or, si l'on ajoute à une solution de saponine un volume égal d'alcool, l'agitation ne développe plus sur le mélange qu'une mousse à peine sensible, qui disparaît presque instantanément. C'est que l'excès négatif de l'alcool neutralise complétement l'excès positif de la saponine.

§ 279. J'ai dit ci-dessus qu'une solution de bonne saponine à $\frac{1}{4000}$ développe encore, par l'agitation, une mousse abondante et persistante; mais ce liquide refuse de se laisser gonfler en bulles à l'orifice d'une pipe; c'est donc un second exemple à ajouter à celui que présente (§ 249) la solution de gomme arabique à $\frac{1}{10}$, d'un liquide fournissant une mousse assez volumineuse et très-durable, et refusant de se façonner en bulles.

En parlant (§ 161) de la formule à laquelle arrive Dupré pour exprimer la vitesse de retrait d'une lame liquide qui se brise, j'ai avancé que cette formule faisait abstraction d'un élément important auquel Dupré ne pouvait avoir égard, et qui devait, pour certains liquides, rendre les résultats très-inexacts; l'élément dont il s'agit est la viscosité superficielle; nous avons vu plus haut, en effet, que la viscosité superficielle d'une solution de saponine exerce une telle influence sur le phénomène, qu'une lame de cette solution peut exiger plusieurs secondes pour son retrait.

§ 280. La viscosité intérieure d'une solution de bonne saponine à $\frac{1}{100}$ est, on l'a vu, à fort peu près égale à celle de l'eau pure, bien que cette solution donne, à l'orifice d'une pipe, des bulles de 12 centimètres de diamètre ; on peut conclure aussi des valeurs de la durée à l'intérieur dans les séries comparatives du § 275, malgré la petite divergence qui s'y rencontre, que la viscosité intérieure de la solution de savon de Marseille à $\frac{1}{40}$ l'emporte fort peu sur celle de l'eau pure ; et cependant, avec cette solution, on gonfle, à l'orifice d'une pipe, des bulles de plus de 25 centimètres de diamètre. Ajoutons qu'on forme encore des bulles de 10 centimètres avec une solution à $\frac{1}{500}$ du même savon, liquide dont la viscosité intérieure ne peut évidemment différer d'une manière appréciable de celle de l'eau ; si, en outre, nous nous rappelons que des liquides très-visqueux, tels que l'huile d'olive, la glycérine et une solution de gomme, auxquels on peut ajouter la mélasse et le sirop de glucose pur ou dilué, sont complétement impropres à la génération des bulles, nous ne pourrons conserver aucun doute sur l'erreur de l'opinion accréditée qui attribue à la viscosité ordinaire la propriété des liquides qui se laissent aisément développer en bulles volumineuses.

Cependant l'influence de la viscosité intérieure n'est pas tout à fait nulle, surtout à l'égard des lames de la première et de la troisième catégorie. Dans celles de la deuxième, les deux couches superficielles ayant plus de mobilité moléculaire que la couche interposée, la descente du liquide s'effectue principalement par les premières, et le plus ou moins de viscosité de la couche interposée doit avoir peu d'effet; c'est ainsi que les lames d'huile s'atténuent avec une extrême rapidité (§ 247), malgré la forte viscosité intérieure du liquide. Mais dans les lames de la première et de la troisième catégorie, où la mobilité moléculaire est moindre dans les couches superficielles que dans la couche interposée, celle-ci participe nécessairement davantage à la descente, et sa viscosité doit intervenir jusqu'à un certain point; nous en verrons plus loin (§§ 294 et 298) des exemples.

§ 281. La solution d'albumine, préparée comme je l'ai indiqué (cinquième note du § 248), présente, bien qu'à un degré moins prononcé, des propriétés analogues à celles de la solution de saponine : sur la surface, l'aiguille, laissée libre à 90° du méridien magnétique, a employé environ trois quarts d'heure à décrire un angle de 35°, et n'a pas été plus loin ; à l'intérieur, la durée du parcours des 85° n'a été que de 9″,77.

La viscosité superficielle de ce liquide, quoique moins énorme que celle de la solution de saponine, est donc encore extrêmement énergique; aussi quand les bulles atteignent 11 à 12 centimètres, elles donnent des membranes semblables à celles des bulles de saponine.

Si l'on ajoute à notre solution d'albumine 10 fois son volume d'eau distillée, le mélange fournit encore une mousse abondante et très-persistante, mais on ne parvient plus à le façonner en bulles, ce qui constitue un troisième exemple analogue à ceux que j'ai déjà signalés ; j'essaierai plus loin (§ 304) d'expliquer ce singulier phénomène.

Je n'ai pas opéré avec l'aiguille sur la solution d'acétate de fer ; je n'en avais à ma disposition qu'une trop petite quantité.

§ 282. Ainsi les résultats obtenus avec l'aiguille aimantée à l'égard des quinze liquides que j'ai soumis à ce genre d'essai, confirment pleinement les déductions tirées (§ 252) des expériences sur les calottes laminaires ; on peut donc, je pense, regarder comme bien établi le principe suivant :

La couche superficielle des liquides a une viscosité propre, indépendante de la viscosité de l'intérieur de la masse ; dans certains liquides, cette viscosité superficielle est plus forte que la viscosité intérieure, et souvent de beaucoup, *comme dans l'eau et surtout dans une solution de saponine ; dans d'autres liquides elle est, au contraire, plus faible que la viscosité intérieure, et souvent aussi de beaucoup, comme dans l'essence de térébenthine, l'alcool, etc.*

§ 283. Descartes paraît être le premier qui ait avancé l'idée d'une viscosité superficielle propre ; il s'exprime ainsi[1] :

« La superficie de l'eau est beaucoup plus malaysée à diuiser que n'est le dedans, ainsi qu'on void par expérience en ce que tous les corps assez petits, quoyque de matière fort pesante, comme sont de petites aiguilles d'acier, peuvent flotter et estre au-dessus, lorsqu'elle n'est point encore diuisée, au lieu que lorsqu'elle l'est, ils descendent iusques au fonds sans s'arrester. »

Descartes explique par là comment, lorsque l'eau de mer s'évapore, les cristaux de sel flottent à sa surface.

§ 284. Plus tard, d'après les recherches de Petit[2] (année 1731), on attribua le phénomène des aiguilles flottantes à la présence d'une couche d'air adhérente à leur surface; mais, en 1806, Rumford communiqua, à l'Académie des Sciences de Paris, un Mémoire[3] où il cherche à prouver que la couche d'air n'a aucune influence, et qu'à la surface de l'eau existe une pellicule résistante qui soutient l'aiguille. Quant à l'origine de cette pellicule, il dit simplement : « Si les molécules d'eau adhèrent fortement l'une à l'autre, une suite nécessaire de cette adhésion doit être, ce me semble, la formation d'une espèce de peau à la surface de ce liquide. »

(1) *Les Météores*. Leyde, 1638 ; page 187 du vol. V des Œuvres de Descartes publiées par Victor Cousin.

(2) *De l'adhérence des parties de l'air entre elles, et de leur adhérence aux corps qu'elles touchent* (Mém. de l'Acad. des Sc. de Paris, 1731, p. 50).

(3) *Expériences et observations sur l'adhésion des molécules de l'eau entre elles* (Mém. de l'Acad. des Sc. de Paris, 2me semestre de 1807, p. 97).

Les expériences de Rumford consistent surtout à recouvrir l'eau d'une couche d'un autre liquide convenable; tel que l'essence de térébenthine, et à laisser tomber à travers cette couche les petits corps pesants; ceux-ci s'arrêtent à la surface de l'eau, et y demeurent flottants.

§ 285. En 1806 également, et plus tard en 1814, Link(1) explique le phénomène de la même manière; mais, tandis que Rumford n'avait parlé que de l'eau, il étend la même conception à tous les liquides. Il considère l'apparence de pellicule comme due à ce que les molécules de la surface n'étant attirées que d'un côté, cette inégalité d'action engendre un obstacle aux déplacements.

Link déduit de là une curieuse théorie : il se dit que si un liquide était modifié de manière à présenter un très-grand nombre de surfaces au lieu d'une seule, sa mobilité serait considérablement diminuée; et remarquant que les solides sont composés de fibres ou de lamelles, ou, plus généralement, de très-petites parties distinctes, il en conclut que c'est uniquement à cette circonstance qu'il faut attribuer l'état solide; selon lui, si l'on pouvait établir un contact intime entre toutes les petites parties qui constituent un solide, on transformerait celui-ci en liquide, car alors, par suite de l'arrangement uniforme des molécules, chacune d'elles se trouverait également attirée dans tous les sens, et conserverait ainsi une complète mobilité, du moins dans l'intérieur de la masse. On verra (§ 321) qu'une opinion analogue sur la constitution des solides avait déjà été émise par Leidenfrost.

§ 286. Dans un Mémoire(2) publié en 1808, Prechtl

(1) *Ueber Naturphilosophie*. Leipzig, 1806; voir aussi : *Ueber Festigkeit und Flüssigkeit* (Ann. de Gilbert, 1807, vol. XXV, p. 133), et *Theorie der Flüssigkeit und Festigkeit*, etc. (Ibid., 1814, vol. XLVII, p. 1).

(2) *Theorie der Krystallisation* (Gehlen, Journal für die Chemie, Physik und Mineralogie, vol. VII, p. 455).

adopte les idées de Link sur la viscosité superficielle des liquides, et, pour prouver l'existence de la pellicule à la surface de l'eau, il décrit quelques nouvelles expériences, dont voici la plus concluante :

On dépose sur la surface de l'eau un morceau de ressort de montre, qui y flotte comme les aiguilles ; puis, après avoir répandu sur le liquide une légère couche d'une poudre fine, on imprime, au moyen de l'action à distance d'un barreau aimanté, un mouvement de rotation au morceau de ressort, et l'on constate, par le déplacement des grains de poudre, que toute la surface de l'eau tourne en même temps. Rumford avait fait une expérience qui semblait indiquer aussi un mouvement de toute la surface liquide ; mais on pouvait y voir l'influence de causes étrangères ; celle de Prechtl est, au contraire, parfaitement nette.

Pichard a présenté (1), en 1824, sur le phénomène des aiguilles flottantes, des observations parmi lesquelles une seule a de l'intérêt pour notre travail ; elle consiste en ce que l'auteur a fait flotter ainsi plus de quarante aiguilles, qui, en se juxtaposant, formaient un petit radeau.

La même année, Gillieron a traité aussi la question des aiguilles flottantes (2) ; il adopte les idées de Rumford, mais n'apporte aucun argument nouveau en faveur de l'existence de la pellicule.

Dans sa Note de 1841, dont il a été question au § 123, de Maistre donne, de l'apparence de pellicule à la surface de l'eau, la même explication que Link.

(1) *Considérations sur les phénomènes que présentent de petites aiguilles à coudre, posées doucement et dans une situation horizontale, sur la surface d'une eau tranquille* (Biblioth. Univ., t. XXV, p. 273).

(2) *Sur les mouvements de certains corps flottants sur l'eau* (Ibid., t. XXVI, p. 190, et t. XXVII, p. 207).

§ 287. M. Artur, dans un ouvrage(1) qui a paru en 1842, arrive, par des considérations théoriques qu'il est inutile de reproduire ici, à regarder la couche superficielle de tous les liquides comme ayant plus de densité et plus de cohésion que l'intérieur, et comme présentant, par suite, une certaine résistance. D'après les seules lois de l'hydrostatique, le volume du creux formé à la surface de l'eau par une aiguille qui flotte, devrait excéder six fois celui de l'aiguille, la densité de l'acier étant 7,8; or M. Artur a estimé et fait estimer par d'autres le volume de ce creux, et la plus forte évaluation ne l'a porté qu'au triple de celui de l'aiguille.

§ 288. Ainsi que je l'ai dit (§ 152), M. Hagen a généralisé aussi, en 1845, l'idée d'une moindre mobilité, et celle d'une plus grande densité, dans la couche superficielle des liquides; il s'appuie sur ce que, dans un cours d'eau, la vitesse est plus faible à la surface qu'un peu au-dessous, et sur la production des calottes laminaires par l'ascension de bulles gazeuses; mais le premier de ces faits ne se rapporte qu'à l'eau, et le second ne peut être invoqué, puisque les calottes laminaires se forment parfaitement sur l'alcool, sur l'essence de térébenthine, etc., liquides dans lesquels la couche superficielle est, au contraire, nous le savons maintenant, plus mobile que l'intérieur.

§ 288bis. Dans le Mémoire (année 1865) dont j'ai parlé au § 160bis, M. Marangoni, après avoir fait remarquer que, lorsqu'une goutte d'un liquide est susceptible de s'étaler sur le mercure, elle ne le fait qu'avec lenteur malgré la forte tension du mercure, décrit une expérience curieuse d'où l'on peut inférer que ce dernier liquide possède une viscosité superficielle énergique : il dépose

(1) *Théorie élémentaire de la capillarité.* Paris.

sur la surface du mercure un petit morceau de papier mouillé, et constate qu'il est impossible de le faire mouvoir par le souffle de la bouche.

§ 289. En 1866, M. Nägeli[1] conclut d'expériences qu'il a faites sur les colonnes capillaires d'eau, qu'une semblable colonne oppose une certaine résistance au mouvement, indépendante du frottement de la totalité de la colonne contre la paroi intérieure du tube, et qui ne peut provenir que de la couche superficielle du sommet; il admet conséquemment, dans cette couche, une viscosité plus grande qu'à l'intérieur. Il attribue à cette viscosité superficielle le fait remarquable étudié par M. Jamin[2], et consistant en ce qu'une colonne capillaire d'eau ou de mercure subdivisée en un grand nombre de petites colonnes partielles, exige une force considérable pour son déplacement. Si c'est là la vraie cause de la résistance des colonnes subdivisées, il faut que cette résistance ne se manifeste pas avec les liquides de ma deuxième catégorie; or M. Jamin dit expressément qu'elle est nulle pour l'alcool et pour l'huile; je reviendrai bientôt sur cette question.

M. Nägeli essaie d'expliquer la viscosité plus grande de la couche superficielle, en partant de la théorie de M. Clausius sur la nature des liquides; il regarde conséquemment aussi le fait comme général, c'est-à-dire comme propre à tous les liquides.

§ 290. Enfin, en 1866 encore, M. Stanislas Meunier[3]

(1) *Ueber die Theorie der Capillarität* (Bullet. de l'Acad. des Sc. de Münich, année 1866, vol. I, p. 597).

(2) *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des liquides dans les corps poreux* (Comptes rendus, 1860, tome L, page 172). Voir aussi, pour plus de détails, *Société chimique de Paris, leçons de chimie et de physique professées en* 1861 *par MM. Jamin, Debray, etc.*, Paris, 1862.

(3) Comptes rendus, tome LXIII, page 265; voir aussi le journal *Le Cosmos*, 1868, 3me série, tome III, pages 635 et 666.

a été conduit par ses expériences à admettre comme MM. Artur et Hagen, une plus forte densité à la surface de tous les liquides. Les expériences dont il s'agit consistent à suspendre un cylindre solide vertical de manière qu'il soit plongé en partie dans un liquide dissolvant; après quelque temps, le cylindre se trouve coupé en deux au niveau de la surface du liquide, et la portion inférieure, qui n'est que partiellement dissoute, tombe au fond du vase. Cependant, quelle que soit la cause de ce singulier phénomène, la viscosité superficielle semble n'y avoir aucune part; j'ai constaté, en effet, qu'un cylindre de colophane est parfaitement coupé par l'essence de térébenthine, bien que, dans ce liquide, la viscosité superficielle soit (§§ 268 et 274) moindre que la viscosité intérieure.

Tel est, à ma connaissance, l'ensemble de ce qui a été fait avant 1870 à l'égard de la viscosité superficielle. On voit actuellement ce que le principe énoncé dans le § 282, principe déduit d'expériences directes, présente de particulier, et par quel point essentiel il diffère de ceux des physiciens dont je viens de résumer les recherches(1).

§ 291. Le principe en question étant, je crois, mis hors de doute, reprenons l'étude des relations entre la viscosité superficielle et la tension.

Pour pouvoir apprécier nettement ces relations dans différents liquides, il faudrait avoir un moyen précis de déterminer numériquement les valeurs de la viscosité superficielle, comme on détermine celles de la tension. Ce moyen précis, je l'ai cherché en vain. Après avoir pris connaissance de l'opinion émise par M. Nägeli, j'ai cru qu'on pourrait employer les résistances que présentent les colonnes capillaires divisées; mais, à la suite

(1) Pour les recherches postérieures à 1869, voir les articles inscrits au § 508 sous les nos 1, 5, 7, 25 et 35.

de nombreux essais, j'ai renoncé à ce procédé ; aussi ne décrirai-je point l'appareil dont je me suis servi ; je dirai seulement que les résistances étaient mesurées à l'aide d'un manomètre à eau.

En effectuant les essais dont il s'agit, j'ai bientôt reconnu que les énormes résistances constatées à l'égard de l'eau par M. Jamin, sont dues, non à la viscosité superficielle, mais à la difficulté qu'éprouvent les index d'eau à se mouvoir dans un tube capillaire dont la paroi intérieure est imparfaitement mouillée : quand la mouillure est complète, les colonnes d'eau divisées ne manifestent que des résistances très-faibles. Je suis parvenu à obtenir une bonne mouillure en remplissant le tube capillaire d'une solution très-concentrée de potasse caustique, le laissant en cet état pendant vingt-quatre heures, puis le vidant, et lavant soigneusement l'intérieur à l'eau distillée ; on y introduisait alors les petits index de ce liquide, et, immédiatement avant d'évaluer la résistance, on faisait marcher plusieurs fois en avant et en arrière la colonne d'index. Dans ces conditions, et avec un tube dont le diamètre intérieur était d'environ $\frac{1}{3}$ de millimètre, la résistance correspondante à 100 index a été trouvée équivaloir simplement à la pression d'une hauteur d'eau de $6^{mm},4$; la température de la chambre était de 17°. Dans mon appareil, on ne pouvait guère porter le nombre des index au delà de 70 ; mais comme la résistance doit évidemment être proportionnelle au nombre des index, on calculait par une proportion celle qui correspondait à 100 index.

Si, au lieu de prendre immédiatement la mesure, on attendait deux minutes, la résistance devenait beaucoup plus grande : on l'a trouvée, dans cette circonstance, toujours pour 100 index, de 44^{mm} environ. C'est que, par suite de leur forte courbure concave, les surfaces terminales des index exercent, sur la couche d'eau qui mouille le tube entre elles, une succion énergique qui fait rapidement disparaître cette couche; aussi ne suis-je pas certain que la résistance $6^{mm},4$ ne soit pas encore un peu trop grande, car, pendant les petits tâtonnements qu'exige la mesure, l'absorption de la couche en question a déjà dû commencer.

Dès 1861, M. Bède avait montré(1), par d'ingénieuses expériences, que lorsqu'un liquide est soulevé dans un tube capillaire préalablement mouillé, la mince couche qui humecte la paroi au-dessus de la colonne ne se maintient pas, et l'expérience ci-dessus confirme pleinement ce résultat.

Maintenant si la faible résistance manifestée par l'eau dans le cas d'une bonne mouillure était due, en tout ou en partie, à la viscosité superficielle, on devait trouver, dans les mêmes conditions, des résistances de beaucoup supérieures avec des solutions de saponine et d'albumine, et c'est ce qui a eu lieu en effet : pour une solution de saponine à $\frac{1}{60}$, la résistance correspondante à 100 index a été de 90^{mm}; et ici encore, après avoir attendu deux minutes, elle s'était considérablement accrue, et atteignait, pour ce même nombre d'index, 440^{mm} à peu près; la température était de 18°. Quant à la solution d'albumine (voir la cinquième note du § 248), sa résistance aurait dû être moindre que celle de la solution de saponine; or elle s'est montrée, au contraire, beaucoup plus considérable : en introduisant dans le tube deux index

(1) *Recherches sur la capillarité* (Mém. de l'Acad. de Belgique, tome XXX des Mém. couronnés et des savants étrangers, p. 143 du Mémoire).

seulement, on n'est parvenu à les déplacer qu'au moyen d'une pression d'environ 37^{mm}, ce qui donne, pour 100 index, 1850^{mm}; température 18^{o}.

La faiblesse de la résistance avec l'eau, les erreurs qui peuvent résulter de l'absorption rapide de la couche mouillante, enfin le désaccord entre les résultats ci-dessus et ceux des expériences avec l'aiguille aimantée en ce qui concerne les solutions de saponine et d'albumine, ne permettent guère, on le voit, d'attribuer une confiance suffisante au procédé des colonnes capillaires divisées ; j'en reviens donc à celui que j'ai exposé dans ma 8^{me} série, bien qu'il ne donne qu'une approximation sans doute assez grossière, et qu'on ne puisse l'employer avec tous les liquides.

§ 292. Il est fondé sur la comparaison des durées respectives du parcours de l'aiguille aimantée sur la surface et à l'intérieur du liquide.

Dans les liquides qui possèdent une viscosité superficielle extrêmement énergique, comme les solutions de saponine et d'albumine, la durée sur la surface est infinie, de sorte que le rapport à la durée intérieure est également infini; dans les liquides de la deuxième catégorie, où la viscosité superficielle est, au contraire, très-faible, le rapport de la durée extérieure à la durée intérieure n'est qu'une fraction; enfin dans les liquides tels que l'eau, où la viscosité superficielle est modérée, le rapport est plus grand que l'unité, mais fini. Ainsi, bien que les rapports dont il s'agit ne puissent évidemment servir de mesure exacte aux viscosités superficielles, on doit reconnaître qu'ils en dépendent, et l'on peut admettre que lorsqu'ils présentent une différence notable d'un liquide à un autre, il y a aussi, en général, une différence de même sens entre les viscosités superficielles de ces liquides.

Cela posé, cherchons les valeurs du rapport en question pour tous les liquides de la première et de la troisième catégorie à l'égard desquels nous en avons mesuré les éléments.

Pour l'eau distillée, les rapports déduits des expériences des §§ 262 et 275 sont 1,94, 1,91 et 1,96; de plus, lorsque j'ai comparé la solution de saponine à l'eau distillée (§ 278), les durées moyennes sur la surface et à l'intérieur de ce dernier liquide ont été respectivement 4",99 et 2",66, d'où le rapport 1,88; la moyenne des quatre rapports est donc 1,92.

Dans le calcul du rapport relatif à la glycérine de Price, on n'a employé, pour la surface, que la première des deux durées indiquées dans le § 263; des expériences antérieures m'avaient appris, en effet, qu'avec ce liquide, les durées sur la surface vont toujours quelque peu en décroissant, à cause sans doute d'une petite absorption de vapeur d'eau, à laquelle on n'obvie pas complétement par l'enduit de glycérine appliqué à l'intérieur de la cloche. On a ainsi, pour le rapport en question, la valeur 1,85.

On a de même, par les éléments donnés dans les §§ 264 à 266 :

pour la solution de carbonate de soude	1,75,
— celle d'azotate de potasse	1,85,
— celle de chlorure de calcium	1,74.

A l'égard des liquides de la troisième catégorie, on obtient :

pour la solution de savon de Marseille, par les résultats des deux séries du § 275, les rapports 1,87 et 1,78, moyenne .	1,82,
pour la solution de savon de ménage (§ 276)	1,85,
— celle de savon de colophane (§ 277), ...	1,63.

Quant aux solutions de saponine et d'albumine, nous savons que les rapports qui les concernent ont des valeurs infinies.

§ 293. Examinons actuellement tous ces rapports de plus près, et voyons quelles conséquences on peut en déduire.

Le rapport 1,85 de la glycérine de Price est assez peu inférieur au rapport 1,92 de l'eau distillée ; cependant il ne faudrait pas en conclure que la viscosité superficielle de la glycérine est voisine de celle de l'eau, l'énorme différence des viscosités intérieures de ces deux liquides introduisant un élément considérable d'erreur au point de vue de la comparaison des rapports. En effet, à cause de la résistance énergique opposée par la viscosité intérieure de la glycérine, l'aiguille ne conserve, tant sur la surface qu'à l'intérieur de cette substance, qu'une très-petite portion de sa force directrice ; mais dès lors un excès superficiel peu intense devient très-grand relativement à ce faible reste de force, et conséquemment doit diminuer beaucoup la vitesse de l'aiguille sur la surface ; or la viscosité de la couche superficielle pouvant être regardée comme égale à la viscosité intérieure plus l'excès positif, on voit qu'avec une viscosité intérieure très-forte et un excès positif très-petit, ce dernier pourrait passer du simple au double ou au triple sans que la viscosité superficielle totale changeât beaucoup, tandis que le rapport des durées subirait, au contraire, de très-grandes variations. Ainsi, comme je l'ai dit, dans le cas d'un liquide très-visqueux, le rapport des durées ne fournit plus d'indication immédiate sur l'intensité de la viscosité superficielle.

Un moyen simple se présentait pour vérifier ces déductions et s'assurer si la grande valeur du rapport de la glycérine est illusoire. Ce moyen consistait à ajouter de l'eau à la glycérine pour amoindrir suffisamment la viscosité intérieure, et à soumettre le mélange à l'essai de l'aiguille. Or, avec un mélange à volumes égaux de glycérine et d'eau distillée, les durées ont été : sur la surface, 10″,93, et, à l'intérieur, 7″,07 ; le rapport est donc 1,54 ; il est, on le voit, fort au-dessous de 1,92 appartenant à l'eau ; et comme la viscosité intérieure est à peu près du même ordre que dans nos autres liquides, le rapport ci-dessus devient comparable à ceux de ces derniers, et nous pouvons en conclure que la viscosité superficielle du mélange en question est très-notablement inférieure à celle de l'eau.

Allons plus loin : la couche superficielle de ce même mélange étant nécessairement composée, comme le reste de la masse, de volumes égaux de glycérine et d'eau, le rapport 1,54 trouvé plus haut peut être regardé comme ne s'écartant guère de la moyenne entre les deux valeurs qu'on obtiendrait, d'une part, si la couche superficielle seule du liquide était formée de glycérine pure, et, d'autre part, si cette même couche était formée d'eau pure; or, dans ce second cas, le rapport s'éloignerait évidemment peu de 1,92 correspondant à l'eau, la viscosité intérieure de notre mélange ne surpassant pas assez celle de l'eau pour introduire un changement bien notable. Si, d'après cela, nous conservons, pour le second cas, la valeur 1,92, et si nous désignons par x celle que donnerait le premier, nous pourrons poser $\frac{x+1,92}{2}=1,54$, d'où $x = 1,16$. Tel est donc approximativement le rapport de la glycérine de Price quand on écarte l'influence de la forte viscosité de l'intérieur de la masse, et il nous apprend qu'il faut regarder la viscosité superficielle de cette substance comme étant, en réalité, beaucoup moindre que celle de l'eau.

§ 294. Le rapport 1,63 du savon de colophane est aussi assez inférieur à celui de l'eau ; or les expériences du § 248, en nous montrant que ce liquide, du moins tel que je l'ai préparé, donne des calottes qui n'ont jamais de phase incolore, nous ont fait connaître que sa viscosité superficielle, bien qu'à excès positif, est peu énergique; il y a donc ici concordance entre les indications fournies par les rapports et celles qu'on déduit de résultats plus nettement interprétables.

D'un autre côté, le rapport 1,16, que nous avons obtenu d'une manière indirecte et que nous avons été conduits à regarder comme donnant une idée de la vraie viscosité superficielle de la glycérine de Price, est bien plus encore au-dessous de celui de l'eau, et cependant les calottes de glycérine, même celles qui ont duré longtemps (§ 246), n'ont manifesté aucune coloration générale; en outre, les rapports 1,75 et 1,74 des solutions de carbonate de soude et de chlorure de calcium sont inférieurs aussi à celui de l'eau, bien que de moindres quantités; or, tandis que dans les calottes d'eau qui se sont moirées de rouge et de vert la phase blanche n'a été au maximum que de 13″, le carbonate de soude a donné des calottes qui n'ont éclaté qu'après 26″ sans qu'on y observât de trace de couleurs, et les calottes de chlorure de calcium ne se sont moirées qu'après 100″ au moins (*ibid.*); à l'égard des trois liquides ci-dessus, il semble donc y avoir contradiction entre les indications des rapports et celles des calottes; mais je vais montrer que cette contradiction n'est qu'apparente.

J'ai appelé l'attention (§ 280) sur une petite influence de la viscosité intérieure dans les lames de la première et de la troisième catégorie; or il est rationnel d'attribuer à cette influence le désaccord ci-dessus; on comprend, en effet, que, dans les calottes de glycérine, la forte viscosité intérieure ralentit assez la descente du liquide, malgré le peu d'énergie de la viscosité superficielle comparée à celle de l'eau, pour que la rupture ait lieu avant l'apparition d'aucun moiré. La durée du parcours de l'aiguille à l'intérieur de la solution de carbonate de soude a (§ 264) pour partie entière 4″, tandis qu'à l'intérieur de l'eau (§§ 262 et 275), la partie entière n'a jamais été que de 2″; la viscosité intérieure de la solution dont il s'agit excède donc celle de l'eau, ce qui explique pourquoi, après 26″, les calottes n'avaient pas encore de moiré; enfin la viscosité intérieure de la solution de chlorure de calcium est plus grande encore, puisque la partie entière de la durée est (§ 266) de 8″, ce qui rend raison des 100″ de phase incolore.

Prenons maintenant, parmi les liquides à l'égard desquels nous avons pu évaluer les rapports, ceux dont la viscosité intérieure est très-voisine de celle de l'eau. Il y en a trois, savoir les solutions d'azotate de potasse, de savon de Marseille et de savon mou de ménage; pour chacun d'eux, en effet, la partie entière de la durée à l'intérieur est, comme pour l'eau, de 2″. Les rapports 1,85, 1,82 et 1,85 qui leur appartiennent respectivement, diffèrent assez peu de celui de l'eau, d'où nous inférerons que les viscosités superficielles de ces mêmes liquides approchent aussi de celle de l'eau; or, dans les calottes d'eau, la phase blanche qui a précédé le moiré a été de 10″ à 13″, dans celles de savon de Marseille elle a été de 6″ à 20″, dans celles de savon mon de ménage, de 5″ à 14″ (§§ 246 et 248), et l'on peut évidemment, à travers leurs irrégularités, reconnaître qu'elles sont de même ordre. Quant aux calottes d'azotate de potasse, elles n'ont pas donné de moiré, mais leur persistance n'ayant pas dépassé 6″, nous ignorons si leur phase blanche n'aurait pas été analogue. L'accord entre les rapports et les calottes reparaît donc quand les viscosités intérieures sont sensiblement égales. Ainsi, comme je l'ai avancé, la contradiction que j'ai signalée à l'égard de trois liquides n'est pas réelle; elle provient simplement de l'influence de la viscosité intérieure.

Comme exemple encore de cette influence, je rappellerai que, dans les calottes de la solution d'albumine, la phase incolore a été beaucoup plus longue que dans celles de la solution de saponine, bien que (§§ 278 et 281) la viscosité superficielle du premier de ces liquides soit moins énergique que celle du second; c'est que le contraire a lieu à l'égard des viscosités intérieures, les durées du parcours de l'aiguille à l'intérieur de ces mêmes liquides ayant respectivement pour parties entières 9″ et 2″. J'ai rappelé aussi, dans le § 258, la grande longueur de la phase blanche dans les calottes de la solution d'albumine pour montrer, déjà alors, que la viscosité superficielle de cette solution l'emporte de beaucoup sur celle de la solution de chlorure de calcium; mais j'en avais le droit, car si, dans ces deux liquides, les phases blanches diffèrent considérablement, d'autre part les viscosités intérieures sont très-rapprochées, les parties entières de la durée à l'intérieur étant respectivement 8″ et 9″.

§ 295. Avant de faire usage de nos rapports, présentons encore une remarque. Puisque ces rapports deviennent infinis pour des viscosités superficielles très-intenses mais finies, comme celles des solutions de saponine et d'albumine, on doit en inférer qu'ils varient suivant une loi plus rapide que les viscosités superficielles; or, abstraction faite des rapports excessifs de la saponine et de l'albumine, tous sont moindres que celui de l'eau; si donc nous prenons toujours ce dernier liquide comme type, et si, adoptant le rapport 1,92 qui lui appartient pour représenter sa viscosité superficielle, nous voulons conclure des rapports des autres liquides aux viscosités superficielles de ceux-ci, il semble qu'il faut les considérer tous comme trop faibles, et que, pour en déduire les viscosités en question, on devrait les augmenter un peu, et d'autant plus qu'ils sont plus petits. Mais, d'un autre côté, dans tous nos liquides, la viscosité intérieure l'emporte sur celle de l'eau ; pour les uns l'excès est extrêmement faible, et pour d'autres il est notable (j'écarte ici la glycérine, sur laquelle je reviendrai) ; le raisonnement que nous avons fait (§ 293) à l'égard du rapport immédiat de la glycérine, est donc applicable à tous, c'est-à-dire que, pour qu'ils pussent représenter les viscosités superficielles, il faudrait, d'après ce même raisonnement, les diminuer un peu, et d'autant plus que la viscosité intérieure est plus forte. Pour adapter nos rapports aux viscosités superficielles, il faudrait conséquemment leur faire subir deux petites corrections en sens contraires, lesquelles se compenseraient ainsi partiellement.

Afin de mieux apprécier les choses, plaçons en regard des rapports les parties entières de la durée à l'intérieur; nous aurons de cette manière le tableau qui suit :

LIQUIDES.	PARTIES ENTIÈRES DE LA DURÉE.	RAPPORTS.
Eau	2″	1,92
Solution de savon de Marseille . . .	2	1,82
— de savon de ménage. . . .	2	1,85
— d'azotate de potasse. . . .	2	1,85
— de carbonate de soude . . .	4	1,75
— de savon de colophane . . .	4	1,63
— de chlorure de calcium. . .	8	1,74

Il nous montre d'abord que les trois rapports les plus rapprochés de celui de l'eau appartiennent aux liquides dont la viscosité intérieure est aussi très-voisine de celle de l'eau; les deux corrections opposées que chacun d'eux devrait subir seraient donc l'une et l'autre fort petites, et, après leur compensation partielle, les rapports dont il s'agit seraient sans doute à peine modifiés. Pour les trois autres liquides, les rapports étant plus notablement inférieurs à celui de l'eau, et les viscosités intérieures étant un peu plus fortes, les corrections seraient toutes deux plus grandes, et conséquemment, après leur compensation, les rapports ne seraient pas beaucoup altérés.

Quant à la glycérine, le rapport 1,54 que l'expérience nous a donné directement pour un mélange à volumes égaux de glycérine et d'eau, est plus encore au-dessous de celui de ce dernier liquide; mais, d'autre part, comme la partie entière de la durée à l'intérieur est de 7″, on peut aussi admettre une compensation plus ou moins approchée, et considérer le rapport dont il s'agit comme correspondant sans trop d'erreur à la viscosité superficielle du mélange; or cette viscosité doit être moyenne entre celle de la glycérine pure et celle de l'eau pure; pour avoir le rapport correspondant à la première, il faut donc refaire identiquement le calcul du § 293, et l'on retrouve ainsi le nombre 1,16, qui peut dès lors être adopté pour représenter approximativement la valeur relative de la viscosité superficielle de la glycérine de Price.

§ 296. Après toute cette discussion, l'on m'accordera, j'espère, qu'à défaut de moyen de mesure plus précis, nous pouvons, sans trop de témérité, considérer nos rapports comme exprimant, d'une manière approchée, les viscosités superficielles relatives des liquides, en écartant, bien entendu, les rapports infinis, et en prenant, pour la glycérine, le rapport corrigé 1,16. Il ne nous reste donc plus qu'à comparer aux tensions les viscosités superficielles ainsi évaluées.

Seulement, pour que ces nouveaux rapports ne soient point de simples fractions, nous représenterons par 100 la viscosité superficielle de l'eau; une simple proportion nous donnera alors, pour chaque liquide, la viscosité superficielle dans le même système d'unités. Pour la glycérine, par exemple, nous poserons: $1,92 : 1,16 = 100 : y$, d'où $y = 60,42$. Avec les nombres ainsi obtenus, nous formerons les deux tableaux suivants:

PREMIÈRE CATÉGORIE.

LIQUIDES.	VISCOSITÉS SUPERFICIELLES.	TENSIONS DES LAMES.	RAPPORTS DES VISCOSITÉS SUPERFICIELLES AUX TENSIONS.
Eau (1).	100,00	14,60	6,85
Glycérine de Price . . .	60,42	8,00	7,55
Solution saturée de carbonate de soude. . . .	91,14	8,56	10,65
Solution saturée d'azotate de potasse.	96,35	11,22	8,59
Solution saturée de chlorure de calcium . . .	90,62	11,06	8,19

(1) On a vu (§ 169) qu'en employant un nouveau procédé, M. Quincke a trouvé, pour la tension de la surface de l'eau, la valeur 8,253, ce qui donnerait, pour la tension des lames de ce liquide, 16,506; M. Quincke regarde son procédé comme plus exact que ceux de ses devanciers; mais comme il n'a pas déterminé les tensions des autres liquides qui entrent dans mes tableaux, et comme d'ailleurs nous n'avons besoin ici que de valeurs relatives, j'ai cru devoir conserver pour l'eau celle déduite des anciennes méthodes. Du reste, si l'on adoptait la valeur 16,506, elle ne ferait que rendre plus petit encore le rapport appartenant à l'eau.

TROISIÈME CATÉGORIE.

LIQUIDES.	VISCOSITÉS SUPERFICIELLES.	TENSIONS DES LAMES.	RAPPORTS DES VISCOSITÉS SUPERFICIELLES AUX TENSIONS.
Solution de savon de Marseille à $\frac{1}{40}$	94,79	5,64	16,81
Solution de savon mou de ménage à $\frac{1}{30}$	96,35	6,44	14,96
Solution de savon de colophane à base de potasse.	84,89	7,68	11,05
Solution de saponine à $\frac{1}{100}$.	Non déterminée, mais extrêmement forte.	8,74	Non déterminé, mais très-grand.
Solution d'albumine . .	Id.	11,42	Id.

§ 297. On le voit donc à l'inspection de ces deux tableaux : en premier lieu, les rapports de la viscosité superficielle à la tension sont tous plus grands à l'égard de ceux de nos liquides qui appartiennent à la troisième catégorie, c'est-à-dire qui donnent des bulles et une mousse volumineuses, qu'à l'égard de ceux qui appartiennent à la première et ne donnent conséquemment ni bulles à l'orifice d'une pipe, ni beaucoup de mousse ; de plus, sauf pour un seul, l'excès est considérable.

En second lieu, parmi les liquides du premier tableau, celui pour lequel le rapport a la valeur la plus élevée est la solution de carbonate de soude; aussi, de ces cinq liquides, c'est celui qui fournit, par l'agitation dans un flacon, la mousse la plus apparente : elle atteint un centimètre de hauteur, et emploie plus d'une heure à disparaître totalement; on peut donc conjecturer que si la solution saturée de carbonate de soude est impropre à former des bulles à l'orifice d'une pipe, elle est moins éloignée d'en donner que les quatre autres liquides. D'ailleurs, si les liquides de ce premier tableau refusent de se laisser gonfler en bulles à un orifice évasé, ils en donnent de petites à l'extrémité d'un tube étroit; or, en employant un tube en verre de près de 6^{mm} de diamètre extérieur et de 1^{mm} de diamètre intérieur, et en opérant à la température de 19°, les bulles formées ont présenté les diamètres qui suivent; chacun d'eux est le plus grand qui se soit montré dans un nombre assez considérable d'essais successifs :

Eau.	7^{mm},5,
glycérine	8,
carbonate de soude	14,
azotate de potasse	8,
chlorure de calcium	9;

et l'on voit que les bulles de carbonate de soude sont de beaucoup les moins petites.

En troisième lieu, celui des liquides du second tableau qui présente le plus petit rapport, est la solution de savon de colophane, et c'est aussi celui qui m'a fourni les bulles les moins grosses : j'ai effectué plusieurs préparations successives de ce liquide avec les mêmes substances, dans les mêmes proportions, et en employant le même procédé, mais, je ne sais pourquoi, ces préparations se sont montrées de moins en moins bonnes; la solution avec laquelle ont été faits les essais à l'aiguille (§ 277), essais dont on a déduit le nombre qui, dans le tableau, représente la viscosité superficielle, ne m'a donné que des bulles de 9 centimètres au maximum, tandis qu'avec les solutions de savon de Marseille et de savon de ménage, on obtient 25 centimètres, et, avec celles d'albumine et de saponine, 13 centimètres. Les résultats de nos deux tableaux sont donc bien d'accord avec la théorie exposée dans les §§ 258 et 259. Il y a, du reste, une petite incertitude à l'égard du savon de colophane : la tension 7,68 inscrite dans le tableau n'a pas été mesurée sur la même solution, mais sur une autre, qui résultait d'une préparation précédente, et qui donnait des bulles atteignant 12 centimètres, bien qu'à grand'peine, si mes souvenirs sont exacts.

On remarquera sans doute le peu de différence entre les rapports 10,65 et 11,05 appartenant respectivement à la solution de carbonate de soude, qui ne se laisse pas gonfler en bulles à l'orifice d'une pipe, et à celle de savon de colophane, qui en a donné d'un certain diamètre. Mais ceci encore est une conséquence de notre théorie; en effet, d'après nos tableaux, la viscosité superficielle est moindre dans le second de ces liquides que dans le premier; or il suit de la remarque énoncée à la fin du § 259, que si, avec cette viscosité superficielle assez peu énergique, le rapport 11,05 permet la formation de bulles de médiocre grosseur, ce même rapport, et, à plus forte raison, le rapport un peu moindre 10,65, peut ne plus la permettre avec une viscosité superficielle plus intense.

On comprend aussi, en vertu de la même remarque, pourquoi les bulles des solutions d'albumine et de saponine n'ont pas dépassé 13 centimètres, bien qu'à l'égard de ces liquides les rapports de la viscosité superficielle à la tension soient considérables ; c'est que, par suite de l'énergie des viscosités superficielles, les rapports doivent être très-grands pour amener la possibilité de bulles volumineuses, et qu'ils ne le sont sans doute pas assez.

Enfin la remarque rappelée nous explique également pourquoi, tandis que les diamètres maxima sont sensiblement les mêmes pour ces deux liquides, le rapport est plus grand à l'égard du second ; c'est que la viscosité superficielle de celui-ci est plus intense encore que celle du premier. Je crois, du reste, qu'avec la solution de saponine, je n'ai pas atteint le vrai diamètre maximum : à l'époque où j'ai cherché ce diamètre, en employant la solution du meilleur échantillon de saponine (§ 278), solution qui a servi à la mesure de la tension, j'ignorais que, pour développer les plus grosses bulles, le liquide devait être parfaitement limpide : si on l'avait rendu tel, on aurait probablement porté le diamètre un peu plus loin.

Quelques-uns des liquides de la première catégorie essayés au point de vue des calottes n'ont pu l'être, nous le savons, au moyen de l'aiguille ; cependant, à l'égard du plus important d'entre eux, savoir de l'acide sulfurique, nous pouvons nous assurer, d'une autre manière, que la théorie est satisfaite. Pour qu'elle ne le fût pas, il faudrait que le rapport de la viscosité superficielle à la tension eût une valeur considérable ; or la tension des lames d'acide sulfurique est très-forte : elle est égale à 12,88, et approche, on le voit, de celle de l'eau ; un grand rapport exigerait dès lors une viscosité superficielle beaucoup plus énergique que dans l'eau ; mais, comme je l'ai dit à la fin du § 246, celles des calottes de l'acide en question qui n'ont que quelques millimètres de diamètre, durent souvent bien plus longtemps, et manifestent des couleurs : après une phase incolore d'une demi-minute à une minute environ, elles se moirent de rose et de vert, et, dans les plus durables, apparaissent ensuite d'autres teintes ; maintenant si, à sa forte viscosité intérieure, l'acide sulfurique joignait une viscosité superficielle très-énergique, ces colorations ne pourraient évidemment se produire qu'après des phases blanches bien plus longues ; l'acide sulfurique a donc une viscosité superficielle assez faible, quoique à excès positif, et conséquemment le rapport est petit.

Enfin, bien que la solution d'acétate de peroxyde de fer n'ait pu être soumise non plus à l'essai de l'aiguille, il est aisé de faire voir qu'elle satisfait également à la théorie. La tension de ses lames est 10,2, c'est-à-dire assez forte; or, si l'on ne tient pas compte du rouge et du vert qui apparaissent momentanément au bas de la plupart des calottes pour s'effacer ensuite (§ 248), et qui sont probablement dus à la petite quantité d'acide acétique libre que contient toujours ce composé, l'observation montre (*ibid.*) que la phase incolore est très-longue, et qu'ainsi la viscosité superficielle doit être très-intense; le rapport de celle-ci à la tension a donc lui-même une valeur élevée; seulement elle ne l'est vraisemblablement pas assez pour que les bulles puissent parvenir à un grand diamètre.

§ 298. Maintenant que nous connaissons, pour presque tous nos liquides, la valeur approximative du rapport de la viscosité superficielle à la tension, nous pouvons signaler quelques nouveaux exemples de la petite influence de la viscosité intérieure; ils concernent, non plus la durée de la phase blanche, mais la durée totale des calottes. C'est, en effet, évidemment à cette influence qu'il faut attribuer les 80″ de persistance maxima des calottes de glycérine, et les 229″ des calottes de la solution saturée de chlorure de calcium, malgré la petitesse des rapports; c'est elle aussi, sans doute, qui a déterminé les 142″ des calottes de la solution saturée d'acide tartrique, ce liquide étant fort visqueux; enfin c'est par elle qu'on s'explique pourquoi la persistance des calottes de la solution de saponine est loin d'atteindre celle des calottes de la solution d'albumine, bien que le rapport soit beaucoup plus grand à l'égard de la première.

§ 299. Les résultats auxquels nous sommes arrivés vont nous permettre de rendre complétement raison des propriétés remarquables des bulles de liquide glycérique, et l'accord de l'explication avec les phénomènes apportera de nouveaux arguments à l'appui de notre théorie.

En premier lieu, cherchons quelle doit être la valeur approchée de la viscosité superficielle du liquide glycérique. Quand on prépare ce liquide au savon, les meilleures proportions sont celles que j'ai indiquées (§ 100), savoir 2,2 volumes de glycérine de Price pour 3 de solution de savon de Marseille à $\frac{1}{40}$; or on peut admettre que, dans ce mélange, les viscosités superficielles se répartissent dans le rapport des volumes; si donc on prend, dans les tableaux du § 296 les valeurs des viscosités superficielles respectives des deux ingrédients, savoir 60,42 et 94,79, la viscosité superficielle du mélange sera égale à $\frac{2,2 \times 60,42 + 3 \times 94,79}{2,2 + 3} = 80,25$; elle est, on le voit, de beaucoup inférieure à celle de l'eau.

Quant à la tension du liquide, elle ne diffère pas d'une manière appréciable de celle de la solution de savon qui en fait partie. En effet, la tension d'une lame liquide peut (§ 158) être représentée par l'expression $\frac{rp}{2}$ ou $\frac{pd}{4}$, dans laquelle p est la pression exercée par une bulle du même liquide sur l'air qu'elle emprisonne, et d le diamètre de cette bulle; or on a vu (§ 121) qu'à l'égard du liquide glycérique, on a, aux températures ordinaires, $pd = 22,56$; on en déduit $\frac{pd}{4} = 5,64$, valeur qui est aussi celle de la tension d'une lame de notre solution de savon[1]. Cette identité ne doit pas surprendre : d'après les recherches de Dupré, la tension d'une solution de savon varie à peine par des changements même très-considérables dans la proportion d'eau[2], et sans doute la même chose a lieu quand on étend la solution avec de la glycérine.

Dans le liquide glycérique, le rapport de la viscosité superficielle à la tension est donc égal à $\frac{80,25}{5,64} = 14,22$; or, avec une viscosité superficielle si peu intense et un rapport si élevé, le liquide dont il s'agit doit nécessairement se laisser développer en très-grosses bulles, et c'est ce que confirme l'expérience.

§ 300. En second lieu, rappelons-nous (§ 108) que lorsqu'une bulle est réalisée avec un bon liquide glycérique, la lame, après s'être graduellement atténuée jusqu'à un certain point, reprend ensuite peu à peu une nouvelle épaisseur, et revient en général, avant d'éclater, au rouge et au vert des derniers ordres. J'ai montré que cette marche rétrograde est due à ce que le liquide glycérique absorbe l'humidité de l'air, et j'ai annoncé

(1) M. Van der Mensbrugghe a trouvé, pour le liquide glycérique (voir la première note du § 162), une valeur un peu plus forte, savoir 6; mais le liquide dont il s'est servi était ancien, et avait conséquemment subi plus ou moins d'altération.

(2) Dupré avance une explication de ce fait remarquable; il expose, dans ses Mémoires et dans son ouvrage (page 376 de celui-ci), les conditions qui permettent à une substance de se dissoudre sans action chimique dans un liquide; il arrive à cette singulière déduction que, dans certaines circonstances, la substance dissoute tend à se porter à la surface de la solution et il indique comme exemple la solution de savon : il détermine, au moyen de son aréomètre (§ 161), la tension d'une solution extrêmement faible de savon, et la trouve très-peu différente de celle d'une solution forte, tandis qu'en se servant du procédé des jets (ibid.), il la trouve égale à celle de l'eau pure ; c'est que, suivant lui, dans le premier cas le savon s'est porté à la surface, et que, dans le second, le mouvement continuel du liquide s'oppose à ce triage.

(§ 109) que j'étudierais de plus près la cause du phénomène; c'est ce que je vais faire actuellement.

Dès le moment où la bulle est formée, la lame qui la constitue se trouve évidemment soumise à deux actions différentes, savoir celle de la pesanteur, qui tend à l'amincir en faisant incessamment glisser les molécules depuis le sommet jusqu'au bas, et celle de l'absorption, qui tend, au contraire, à l'épaissir. Cela posé, la marche des teintes montre que la cause d'amincissement est d'abord prépondérante, mais que, plus tard, c'est la cause d'épaississement qui prédomine; il y a donc une époque de l'existence de la bulle où ces deux causes se contre-balancent, c'est-à-dire où la lame gagne autant qu'elle perd. Or on ne peut s'expliquer, à moins d'une cause particulière, pourquoi l'équilibre entre le gain et la perte ne continue pas à subsister; en effet, les épaisseurs par lesquelles la lame repasse ensuite sont égales à celles qu'elle avait antérieurement; mais, à ces époques antérieures, elle allait en s'amincissant; comment donc concevra-t-on qu'avec les mêmes épaisseurs elle ne s'amincisse plus, surtout si l'on réfléchit qu'en devenant plus aqueux, le liquide devient plus fluide? A la vérité, il devient aussi moins dense; mais comme la densité du liquide glycérique non altéré ne surpasse que d'un dixième environ celle de l'eau pure (§ 122), elle ne peut éprouver qu'une diminution très-faible, diminution compensée d'ailleurs par l'augmentation de fluidité.

§ 301. Voici, du reste, une expérience qui prouve que le changement de densité n'est aucunement la cause du phénomène : un anneau horizontal en fil de fer est attaché par sa fourche sous le bras d'un support muni de vis calantes; on soulève jusqu'à cet anneau une capsule contenant du liquide glycérique dans lequel on le fait plonger, puis on abaisse assez rapidement la capsule; l'anneau se trouve alors occupé par une lame à laquelle une goutte demeure suspendue; si cette lame est bien horizontale, il est clair que la goutte se tient exactement en son milieu; dans le cas contraire, on l'y amène au moyen des vis du support. Cela fait, on crève la lame, et l'on en réalise une autre par le même procédé; seulement on abaisse d'abord la capsule d'une quantité insuffisante pour que le caténoïde laminaire qui se développe entre l'anneau et la surface du liquide devienne instable (§ 227) et on la maintient dans cette position pendant un temps qu'on a déterminé par un essai préalable; la lame caténoïde s'atténue alors graduellement, et, par l'abaissement ultérieur de la capsule, elle va remplir l'anneau sous une forme parfaitement plane, sans goutte suspendue, et bien horizontale.

Cette lame est d'abord incolore, mais, après quelques minutes, on la voit se barioler de rouge et de vert, puis, plus tard, prendre une teinte jaune parsemée de petites taches d'une autre couleur; plus tard encore, le jaune est remplacé par le bleu, puis par l'indigo, puis par le pourpre, après quoi les teintes rétrogradent, de sorte qu'à la fin reparaît le bariolage rouge et vert des derniers ordres.

L'anneau qui m'a donné la meilleure réussite n'avait que 2 centimètres de diamètre; avec des anneaux plus grands, de 7 centimètres, par exemple, il y avait bien un commencement de rétrogradation des teintes, mais la lame éclatait toujours avant le retour au rouge et au vert; je dois dire, du reste, que le liquide employé n'était pas excellent. Indiquons encore une précaution indispensable : les soudures des points où l'anneau s'attache aux deux branches de la fourche et celle du point où il se ferme, doivent ne présenter aucune saillie à l'intérieur de ce même anneau ; quand il y a de telles saillies, la lame perd de sa forme plane dans leur voisinage, elle montre, en ces endroits, des systèmes de bandes colorées qui occupent une assez grande étendue, et elle éclate beaucoup plus tôt.

Dans cette expérience, on le voit, la lame commence également par s'amincir jusqu'à un certain point, pour aller ensuite en s'épaississant ; or, comme elle est plane et horizontale, les variations de densité ne jouent évidemment aucun rôle, d'où il faut nécessairement conclure qu'elles sont de même sans influence à l'égard de la bulle, ainsi que je l'ai avancé. Quant à l'amincissement de la lame plane horizontale, il résulte de l'appel incessant opéré par les surfaces fortement concaves de la petite masse qui rattache cette lame à l'anneau, et notre expérience offre un exemple curieux de ce genre d'action.

§ 302. Actuellement, dans le cas de la bulle, comme dans celui de la lame plane, puisqu'une résistance nouvelle se développe au fur et à mesure de l'absorption de l'humidité, on est contraint de reconnaître que cette résistance s'engendre dans les deux couches superficielles, ou, en d'autres termes, que tandis que le liquide interposé devient plus fluide, les couches superficielles le deviennent moins. Alors, en effet, tout s'explique : le liquide descend avec une difficulté et une lenteur croissantes, et la lame s'épaissit librement par l'absorption.

Or l'augmentation de viscosité superficielle par une addition progressive d'eau, suppose nécessairement que la viscosité superficielle du liquide originaire est très-inférieure à celle de l'eau, et c'est ce que nous avons effectivement trouvé (§ 299).

Mais tandis que la viscosité superficielle de la lame qui constitue notre bulle devient de plus en plus forte, la tension change très-peu (*ibid.*), de sorte que le rapport va en croissant.

Ainsi, d'une part, à cause de l'absorption continue de la vapeur d'eau, la lame ne peut, dans aucune phase de son existence, arriver à être très-ténue, et, d'autre part, le rapport entre la viscosité superficielle et la tension demeure assez grand pour rendre les déchirements difficiles jusqu'à ce que la lame se soit assimilé une très-grande proportion d'eau. Ces deux circonstances, on le voit, rendent pleinement raison de la longue persistance de la bulle.

Arrêtons-nous un moment sur la cause qui amène enfin la rupture. Le rapport de la viscosité superficielle à la tension va, il est vrai, en croissant; mais on peut admettre qu'il ne croît pas assez en comparaison de cette viscosité, de sorte qu'il finit par être insuffisant pour le maintien de la lame. Il y a, du reste, une autre cause à assigner à la rupture : on sait que les solutions de savon très-étendues se décomposent spontanément, ce qu'on reconnaît à ce qu'elles se troublent. Cette décomposition a lieu après un temps variable, mais j'ai cru remarquer qu'elle se produit beaucoup plus tôt et pour des proportions d'eau beaucoup moindres quand la solution a été faite à chaud : ainsi, par exemple, on avait préparé, le même jour et avec le même savon, deux solutions, l'une à chaud à $\frac{1}{50}$, l'autre à froid à $\frac{1}{100}$; après refroidissement de la première, on les a étendues toutes deux jusqu'à $\frac{1}{500}$; celle qui avait été faite à chaud s'est troublée immédiatement, et l'autre est demeurée limpide; on a pu amener ensuite cette dernière, sans qu'elle s'altérât, jusqu'à $\frac{1}{1000}$, puis à $\frac{1}{2000}$, et, le lendemain, elle était encore limpide. Ajoutons cependant qu'une autre solution, faite également à froid et amenée à $\frac{1}{2000}$, s'est troublée moins d'une heure après sa formation. Or, dans mes diverses préparations de liquide glycérique, les solutions de savon avaient toujours été faites à chaud; on peut donc croire que lorsque la lame qui constitue la bulle s'est emparée d'une grande quantité d'eau, le savon qu'elle contient se décompose, et dès lors la bulle doit évidemment éclater.

§ 303. J'ai dit (§ 106), à propos des bulles de liquide glycérique réalisées en vase clos, que, pour obtenir le plus de durée, les dimensions du vase devaient être considérables relativement à celles de la bulle; et, en effet, j'avais inutilement essayé en employant un vase de petite capacité. J'ai fait voir, en outre (*ibid.*), qu'on allait beaucoup plus loin encore si l'on plaçait préalablement des morceaux de chlorure de calcium au fond du vase; mais j'ai ajouté qu'il ne fallait pas trop dessécher l'atmosphère de celui-ci. L'explication de ces particularités me paraît fort simple : une juste relation est nécessaire entre la cause d'amincissement et la cause d'épaississement; quand la lame trouve beaucoup de vapeur d'eau à absorber, les teintes rétrogradent trop tôt, et le liquide devient en moins de temps assez aqueux pour que la bulle éclate; quand, au contraire, la quantité de vapeur est insuffisante, soit parce que le vase est petit, soit parce qu'on en a trop desséché l'atmosphère, la lame s'atténue davantage, et se brise ainsi plus tôt par les causes accidentelles.

§ 304. Il me reste à rendre raison du fait singulier des liquides qui fournissent une mousse épaisse et tenace, et refusent cependant de se développer en bulles à l'orifice de la pipe (§§ 249, 279 et 281). Supposons un liquide ayant une très-forte viscosité superficielle; pour qu'on puisse en former des bulles notables, il faudra, d'après la remarque du § 259, que le rapport de cette viscosité à la tension soit aussi très-grand; or imaginons qu'il ne le soit pas assez, mais qu'il se trouve à très-peu près à la limite au delà de laquelle il commencerait à permettre la réalisation des bulles. Un semblable liquide, bien que ne donnant pas de bulles ou en donnant dont le diamètre n'excède celui de l'orifice que de quelques millimètres, se recouvrira, par l'agitation, d'une mousse copieuse et durable. En effet, puisque, dans les conditions que nous lui assignons, notre liquide est peu éloigné de se laisser gonfler en bulles à un orifice de 2 centimètres environ, il doit se façonner aisément en lamelles très-petites comme celles dont se compose la mousse; de plus, par suite de l'énergie de la viscosité superficielle, ces lamelles ne peuvent s'amincir qu'avec une extrême lenteur; enfin, à cause de cette lenteur, et de la faiblesse relative de la tension, les déchirements doivent être fort rares dans les lamelles dont il s'agit, malgré l'appel opéré par les petites masses concaves dont elles sont bordées; la mousse se formera donc en abondance, et persistera longtemps.

Or les solutions de saponine et d'albumine qui ont présenté la propriété dont nous nous occupons, étaient sensiblement à la limite de la génération des bulles, et leurs viscosités superficielles devaient être suffisamment fortes, puisque ces solutions résultaient du mélange de liquides à viscosités superficielles énormes avec de l'eau, qui en possède déjà une assez intense; ces mêmes solutions se trouvaient conséquemment dans les conditions que nous venons de discuter, et l'on admettra sans peine qu'il en est de même de la solution de gomme arabique du § 249.

§ 305. Ainsi que je l'ai fait remarquer à la fin du § 288, de ce que les liquides de notre deuxième catégorie donnent, comme tous les autres, des calottes laminaires à leur surface, on doit conclure que ce n'est pas à la viscosité propre de la couche superficielle qu'il faut recourir pour expliquer la simple génération des lames : j'ai tâché de faire voir, par le contenu du Chap. VI, que lorsqu'il s'agit seulement de cette génération en elle-même, sans avoir égard aux dimensions et à la persistance, on rend complétement raison du phénomène par la viscosité intérieure et la cohésion; mais l'ensemble du Chapitre actuel montre que, pour le développement de lames grandes et assez durables, telles que celles d'eau de savon, la viscosité intérieure n'a qu'une influence très-secondaire. Quant à la cohésion, elle varie, on le sait, dans le même sens que le coefficient de la somme des courbures dans l'expression de la pression capillaire, coefficient qui, d'après les recherches de M. Hagen et de Dupré, n'est autre chose que la tension (1); or cette dernière étant beaucoup plus faible dans l'eau de savon que dans l'eau pure, il en est nécessairement de même de la cohésion; conséquemment ce n'est pas non plus l'intensité de celle-ci qui rend possible la réalisation de grosses bulles, et, pour cette réalisation, des propriétés de nature toute différente doivent intervenir : j'espère avoir, sinon

(1) Plusieurs physiciens admettent que la cohésion est proportionnelle au produit $h\rho$ de la hauteur capillaire par la densité; dans ce cas, comme la tension est elle-même proportionnelle à ce produit, la cohésion et la tension varieraient non-seulement dans le même sens, mais encore dans le même rapport.

rigoureusement démontré, du moins rendu extrêmement probable, que ces propriétés sont la viscosité superficielle et la tension ; que, pour qu'un liquide se laisse facilement étendre en lames de grandes dimensions et d'une certaine persistance, il faut : 1° une viscosité superficielle qui surpasse notablement la viscosité intérieure ; 2° une tension relativement faible ; 3° un rapport d'autant plus grand entre ces deux éléments que le premier est lui-même plus énergique.

CHAPITRE VIII.

Causes accessoires qui influent sur la persistance des lames liquides. — Figures laminaires de très-grande durée. — Historique concernant les lames liquides.

§ 306. Quand on a réalisé des lames avec un liquide réunissant les conditions rappelées ci-dessus, leur persistance est influencée par un certain nombre de causes accessoires que je vais passer en revue.

La première consiste dans les petits ébranlements que communiquent aux lames les agitations de l'air ambiant et les vibrations propagées par le sol. Ces petits ébranlements agissent sans doute en surmontant l'inertie et la résistanee de frottement des molécules ; ils hâtent ainsi la descente de ces dernières, et, par suite, accélèrent l'amincissement ; en outre, ils déterminent, comme je l'ai avancé plusieurs fois, la rupture des portions très-atténuées. C'est en partie pour cela que les lames dont il s'agit se maintiennent en général beaucoup plus longtemps en vase clos ; alors, en effet, l'une des causes d'ébranlements, savoir les mouvements de l'air, se trouve supprimée.

§ 307. Une deuxième cause est l'évaporation, quand le liquide en est susceptible. L'évaporation, comme je l'ai montré (§§ 253 et 255), produit deux effets opposés, dont l'un tend à accélérer et l'autre à ralentir l'amincissement, parce que si elle soustrait incessamment de la matière aux lames, d'autre part les molécules qu'elle enlève sont celles qui, appartenant aux faces extrêmes, descendraient le plus vite et feraient partager plus ou moins leur excès de vitesse aux molécules sous-jacentes. Les faits sur lesquels je me suis appuyé sembleraient indiquer que le second effet, celui de ralentissement, prédomine en général, d'où résulterait la conséquence singulière que l'évaporation est plutôt favorable que nuisible à la persistance ; cependant voyons :

Les faits dont il s'agit se rapportent les uns à des lames d'eau, et les autres à des lames de la deuxième catégorie présentant les teintes inverses ; or les premières éclatent toujours avant de s'être beaucoup atténuées, et, dans les secondes, l'atténuation des portions les plus minces, c'est-à-dire des inférieures, s'arrête bientôt, on l'a vu, soit par un afflux continuel de liquide venant des portions supérieures plus épaisses, soit, au contraire, selon M. Van der Mensbrugghe, par un afflux du liquide du vase montant incessamment vers ces portions supérieures, à cause d'un excès de tension de celles-ci (§ 256) ; mais considérons maintenant une lame de la troisième catégorie, lame où l'amincissement peut progresser sans obstacle, par exemple une bulle de savon déposée sur un anneau. L'effet de la pesanteur est d'autant moindre sur une semblable lame que celle-ci est plus atténuée (§ 109); conséquemment les quantités de liquide qui, dans des temps égaux successifs, abandonneraient, sous la seule action de la pesanteur, le haut de cette lame, iraient en diminuant au fur et à mesure de l'atténuation; mais les quantités successivement enlevées, dans les mêmes temps, par l'évaporation, sont sensiblement égales; or il suit de là que si, au commencement de l'existence de la lame, les secondes de ces quantités de liquide peuvent n'être qu'une fraction des premières, elles leur deviennent plus tard supérieures, et alors nécessairement l'évaporation active l'amincissement. On comprend même que, lorsque l'épaisseur du haut de la lame est devenue extrêmement minime, l'évaporation peut, à elle seule, l'annuler en un point, et occasionner ainsi la rupture.

On voit, d'après cette discussion, que, dans les lames de la troisième catégorie, l'instant de la rupture est hâté par l'évaporation; aussi nos calottes de solution de savon de Marseille (§ 248) qui, dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau, persistaient plusieurs heures, ne duraient que quatre à cinq minutes lorsqu'elles étaient produites dans le bocal toujours fermé, mais sans saturation de son atmosphère; si on les avait formées à l'air entièrement libre, nul doute qu'elles n'eussent éclaté plus tôt encore.

En supprimant l'évaporation par un procédé un peu différent du mien, le Dr Reade[1] a réalisé des lames planes d'eau de savon se conservant au delà de 24 heures. Voici comment il opérait: il introduisait une petite quantité d'eau de savon dans une fiole allongée qu'il

(1) *On a permanent soap bubble, illustrating the colours of thin plates* (PHILOS. MAGAZ., 1837, nouvelle série, vol. XI, p. 375).

faisait ensuite chauffer à 100° au bain-marie ; quand il présumait que la vapeur produite à l'intérieur avait expulsé tout l'air de la fiole, il bouchait hermétiquement celle-ci, puis, après l'avoir laissée refroidir, il y formait une lame plane transversale. Par ce moyen, on le voit, la lame se trouve, comme nos calottes, dans un espace saturé de vapeur d'eau ; si donc la fiole est posée verticalement, de sorte que la lame soit horizontale et qu'ainsi l'action de la pesanteur soit éliminée en même temps que l'évaporation, il ne reste plus, pour amincir cette lame et en amener la rupture, que l'action des surfaces concaves de la petite masse qui la borde, plus les petits ébranlements du sol ; elle doit conséquemment, comme celle du § 229, persister fort longtemps.

Le liquide glycérique, nous le savons, non-seulement n'émet pas de vapeurs, mais absorbe, au contraire, l'humidité de l'air ambiant, et c'est (§ 302) en partie à cause de cela que les lames de ce liquide ont une si grande persistance, même à l'air libre.

§ 308. En troisième lieu, dans le cas particulier du liquide glycérique, la température a une influence notable ; en effet, quand on emploie ce liquide en hiver, ses lames montrent des persistances beaucoup plus inégales qu'en été.

§ 309. En quatrième lieu, puisque la pesanteur fait incessamment descendre le liquide vers le bas des lames, il est clair qu'en supprimant, d'une manière ou d'une autre, l'action de cette force, on doit augmenter la persistance. La condition dont il s'agit se trouve évidemment remplie, ainsi que je l'ai fait remarquer plusieurs fois, à l'égard d'une lame plane et horizontale ; mais, pour juger de son efficacité, il faut comparer, au point de vue de la durée, une semblable lame avec une lame inclinée ou verticale, formée du même liquide et ayant les mêmes dimensions. J'ai effectué cette comparaison sur des lames réalisées à l'air libre, dans des anneaux en fil de fer de 7 centimètres de diamètre, avec la solution de savon de Marseille à $\frac{1}{40}$. Pour la lame horizontale, j'ai employé le procédé du § 301 ; quant à l'anneau vertical, il était porté par une simple tige fixée en un point de son contour dans le prolongement d'un diamètre, et on l'attachait sous la potence par l'autre extrémité de cette tige; pour former la lame, on amenait sous lui un vase plein du liquide, dans lequel on le faisait plonger entièrement, et qu'on abaissait ensuite. Avec chaque anneau, l'expérience a été répétée vingt fois.

Dans l'anneau horizontal, les lames ont persisté de 16″ à 30″, et la moyenne a été de 25″; dans l'anneau vertical, les valeurs extrêmes ont été 9″ et 18″ et la moyenne 13″. Ainsi, parmi les causes accessoires dont nous nous occupons, il faut ranger la position, ou mieux le plus ou moins d'inclinaison des lames.

Avec certains liquides, on annule encore l'action de la pesanteur en développant les lames au sein d'un autre liquide de même densité, et alors l'inclinaison est indifférente : c'est ainsi que les lames d'huile, qui s'atténuent si rapidement et durent si peu dans l'air (§ 247), acquièrent, au contraire, une grande persistance quand elles sont engendrées dans le liquide alcoolique (§§ 218 à 224).

§ 310. En cinquième lieu, les assemblages de lames se maintiennent toujours beaucoup moins longtemps que les figures formées d'une lame unique, telles que les bulles sphériques et les surfaces à courbure moyenne nulle réalisées dans de simples contours fermés. L'explication de ce fait repose sur des considérations que j'ai déjà exposées (§§ 219 et 220), mais que je vais reproduire ici d'une manière plus complète.

Une lame liquide adhérente à un fil solide est, nous le savons, jointe à ce fil, ou plutôt à la couche liquide qui le mouille, par une petite masse à courbures transversales fortement concaves, laquelle exerce un appel incessant sur le liquide de la lame ; de là une cause de plus pour l'amincissement progressif de celle-ci, et, par suite, pour la destruction de la figure. Cette cause existe dans toute figure laminaire adhérente à un fil ou à des fils solides ; mais, dans les systèmes formés à l'intérieur des charpentes polyédriques, s'y ajoute une cause de même nature et plus énergique encore. Tous ces systèmes, en effet, contiennent des arêtes liquides, qui viennent quatre à quatre s'unir en des points liquides, et dont plusieurs s'attachent par leur autre extrémité aux fils solides ; or, sur ces arêtes ainsi qu'en leurs points extrêmes, il y a aussi, nous le savons, de petites surfaces fortement concaves. Celles qui appartiennent aux arêtes ne sont, comme celles qui règnent le long des fils solides, concaves que dans un sens, et, par conséquent, leur action pour amincir les lames est du même ordre ; mais, aux points de jonction des arêtes liquides et aux points où ces arêtes aboutissent aux fils solides, les petites surfaces sont concaves dans tous les sens, de sorte que leur succion capillaire est environ deux fois plus forte encore, et qu'ainsi l'afflux du liquide vers ces mêmes points doit être beaucoup plus grand. Dans les systèmes dont il s'agit, l'amincissement des lames doit donc être plus rapide, et dès lors ces systèmes doivent durer moins longtemps, comme le montre l'expérience. Cependant quand ils sont réalisés dans l'air, on ne remarque aucune augmentation graduelle d'épaisseur ni dans les arêtes liquides ni dans leurs points de jonction; mais c'est que, à mesure que le liquide y afflue, il est entraîné par la pesanteur vers le bas du système.

La persistance de chacun de ces systèmes est, du reste, très-variable, ce que l'on comprend aisément, car, par suite de leur complication, de petites causes accidentelles peuvent agir tantôt plus, tantôt moins, pour amener leur destruction; ainsi celui de tous qui se maintient en général le plus longtemps, est le plus simple, savoir celui du tétraèdre.

La combinaison des lames en système est donc également au nombre des causes accessoires qui modifient la persistance.

§ 311. En sixième lieu, j'ai rappelé (§ 244) que les lames persistent en général d'autant plus qu'elles sont moins grandes. Bien que le fait ait déjà été indiqué pour le cas des bulles de savon (§ 321), je ne crois pas inutile de rapporter quelques résultats obtenus par moi :

1° On a réalisé, avec le liquide glycérique, des systèmes laminaires dans deux charpentes prismatiques triangulaires semblables, mais dont l'une avait toutes ses arêtes longues de 7 centimètres, et l'autre des dimensions moitié moindres. Chacune de ces charpentes était fixée, par la queue de sa fourche, sous une potence, de manière que ses arêtes latérales fussent verticales, et, pour former le système, on se servait du même procédé qu'à l'égard de l'anneau vertical dans les expériences du § 309. Avec l'une et avec l'autre charpente, on a répété sept fois l'observation; les persistances se sont montrées très-variables; mais, avec la grande charpente, les plus longues ont été 32′ et 37′, et, avec la petite, 60′ et 75′.

On a essayé aussi, de la même manière, les systèmes de deux charpentes tétraédriques, l'une de 8 centimètres d'arête, l'autre de 5; on a répété également les observations plusieurs fois; mais, pour la grande charpente, l'instant de la rupture a échappé à l'attention, sauf à l'égard de la plus longue persistance, qui a été de 2 heures; pour la petite, la plus longue persistance a été de 2 heures 36 minutes.

2° On a produit, avec le liquide glycérique encore, des lames planes horizontales dans deux anneaux en fil de fer, l'un de 7, l'autre de 2 centimètres de diamètre; dans le premier, la durée maxima a été d'une heure environ, et, dans le second, elle a dépassé 12 heures.

3° Une bulle de 10 centimètres de diamètre, gonflée avec la solution de savon de Marseille, a été déposée sur un anneau dans l'intérieur d'un vase dont l'atmosphère était saturée de vapeur d'eau; elle a persisté à peu près une heure. On y a substitué une bulle du même liquide, mais d'un diamètre moitié moindre, et celle-ci n'a disparu qu'après 2 heures. On a vu d'ailleurs (§ 107) que des bulles de 30 centimètres de diamètre, formées par M. Böttger avec son liquide au savon d'huile de palme, ne persistaient que 5 à 10 minutes, tandis que des bulles d'environ 8 centimètres pouvaient durer 20 heures.

La durée plus grande des lames de moindres dimensions est, comme je l'ai dit, ce qui a lieu ordinairement; mais quelquefois cette influence de l'étendue ne se manifeste pas : j'ai fait, par exemple, plusieurs séries d'observations sur des lames de solution de savon réalisées dans des anneaux de 10, 7, 2 et 1 centimètres de diamètre, et les durées moyennes n'ont pas présenté de différences notables.

Si la persistance diminue en général quand les lames augmentent en dimensions, cela tient simplement, je pense, à ce que plus une lame est grande, plus il y a de chances pour que l'un ou l'autre de ses points cède à quelque cause de rupture; mais il faut tenir compte d'une autre influence, qui agit en sens opposé : l'amincissement dû à l'appel des petites surfaces concaves qui règnent tout le long du contour d'une lame est nécessairement d'autant plus lent, à égalité de contour, que la lame a plus de surface, et, à égalité de surface, qu'elle a moins de contour; on déduit aisément de là que, dans un anneau circulaire, la lenteur de l'amincissement croît avec le diamètre. Si donc cette dernière influence agissait seule, la persistance irait en augmentant avec la grandeur; or, on le comprend, il peut se faire, dans certaines circonstances, que les deux influences contraires dont je viens de parler se compensent plus ou moins.

§ 312. En septième lieu enfin, il faut encore faire entrer en ligne de compte la nature du solide auquel adhère une lame, et l'état de la surface de ce solide : nous savons, par exemple, que si l'on n'a pas oxydé les anneaux ou les charpentes en fil de fer, les lames de liquide glycérique qu'on y réalise se brisent immédiatement, ou n'ont qu'une très-courte durée. J'ai signalé, dans les §§ 124 et 125, un autre fait de même nature : une bulle de liquide glycérique de 2 centimètres de diamètre, gonflée à l'orifice d'un tube de verre et enfermée dans un petit bocal, s'est maintenue pendant 24 heures, tandis que d'autres bulles du même diamètre, formées du même liquide et enfermées dans le même bocal, mais gonflées à l'orifice d'un tube en fer oxydé ayant même diamètre extérieur que le tube de verre, n'ont persisté au maximum que 14 heures.

M. l'abbé Florimond[1] a annoncé qu'on peut gonfler

(1) Journal *Le Cosmos*, 1862, vol. XX, p. 72.

des bulles de savon beaucoup plus grosses avec une pipe de verre qu'avec une pipe de terre ; il attribue cette différence à ce que l'argile happe ou retient le liquide, de sorte que la lame sphérique naissante ne se développe qu'aux dépens de son épaisseur, tandis qu'avec la pipe en verre, le liquide glisse aisément jusqu'à l'extrême bord de l'orifice, et que la bulle acquiert ainsi un certain volume avant que la lame qui la constitue s'amincisse.

§ 313. Il suit de cet examen de toutes les influences accessoires, qu'avec une lame de dimensions données, on obtiendra la plus grande persistance si cette lame est plane, horizontale, attachée par tout son contour à une paroi de verre, soustraite à toute évaporation, à l'abri des agitations de l'air ambiant, et, autant que possible, des trépidations propagées par le sol. Or toutes ces conditions étaient satisfaites à l'égard de la lame de liquide glycérique de 7 centimètres de diamètre dont j'ai parlé dans le § 229; aussi elle a persisté 18 jours, et n'a probablement éclaté que par suite d'un ébranlement imprimé au plancher. Les mêmes conditions étaient satisfaites à l'égard des lames d'eau de savon dans l'expérience du Dr Reade (§ 307), et, nous l'avons vu, la persistance de ces dernières était de plus de 24 heures.

§ 314. La beauté des figures laminaires de liquide glycérique inspire naturellement le désir d'avoir les mêmes figures tout à fait permanentes. Pour l'une d'elles, la sphère, on atteint ce but avec du verre fondu; chacun sait, en effet, qu'on souffle des bulles sphériques en verre, bulles qui, une fois refroidies, se maintiennent indéfiniment; on peut même atténuer tellement la lame qui les constitue, qu'elle montre des couleurs; mais la réalisation, avec la même substance, des autres figures, surtout de celles qui consistent en un assemblage de lames, offrirait des difficultés, et, dans tous les cas, serait peu commode.

La première idée qui se présente, est d'employer un liquide dont les lames se solidifient par simple évaporation à froid, tel que le collodion, une solution d'albumine, etc. ; mais, avec un semblable liquide, je ne suis parvenu à quelques résultats, qu'en me bornant à des figures de très-petites dimensions. Le liquide qui m'a donné la meilleure réussite est une solution de gutta-percha dans le sulfure de carbone : avec cette solution, j'ai obtenu un très-joli petit système dans une charpente cubique dont les arêtes avaient deux centimètres de longueur ; ce petit système s'est conservé plusieurs mois, après quoi il s'est réduit spontanément en poudre. J'ai essayé inutilement avec une charpente de trois centimètres de côté. La figure de gélatine solidifiée dont j'ai parlé au § 141, adhérait à une charpente dont les côtés avaient, comme M. Schwarz a bien voulu me l'apprendre, environ trois centimètres et demi de longueur ; mais cette figure consistait en une lame unique, et M. Schwarz ne l'a produite qu'à l'aide d'une manœuvre particulière. Pour tâcher d'arriver, dans le cas des assemblages de lames, à des résultats de quelque grandeur, je me suis dit qu'il fallait recourir à des substances qui, ainsi que le verre, ne sont liquides qu'à chaud, et en chercher une qui remplît la double condition de ne pas exiger, pour se fondre, une très-haute température, et de se laisser développer, à l'état fondu, en lames d'une étendue suffisante.

On verra, plus loin, que Morey a obtenu, avec de la résine, des bulles allongées atteignant la grosseur d'un œuf, formées d'une lame assez mince pour montrer des couleurs, et qui paraissaient devoir être indéfiniment permanentes.

M. Böttger[1] a trouvé qu'avec un mélange de 8 parties de colophane et d'une partie d'huile de lin purifiée, fondu au bain-marie et maintenu à la température d'environ 97°, on gonfle aisément de grosses bulles qui persistent longtemps; seulement il n'indique pas leur durée. Avec ce même mélange, M. Rottier a essayé, à ma prière, la réalisation du système laminaire d'une charpente prismatique triangulaire dont les bases avaient 4 centimètres de côté, et dont la hauteur était de 7 centimètres; le système se formait toujours très-bien, et gardait certainement son intégrité un grand nombre d'heures; mais, toujours aussi, on trouvait, le lendemain, l'une des lames trouée.

M. Mach[2] a obtenu, avec de la colophane purifiée fondue, sans mélange d'huile, le système laminaire du tétraèdre régulier dans une charpente de 5 centimètres de côté; mais il n'en a pas observé la durée, les expériences qu'il avait en vue exigeant qu'il détachât le système.

J'ai réussi d'une manière à peu près complète au moyen d'un mélange d'une partie de gutta-percha pure et de 5 parties de colophane, maintenu à la température d'environ 150°. On avait purifié préalablement la colophane en la fondant à une température suffisante, et attendant que la faible quantité d'essence qu'elle contenait encore se fût dégagée sous forme de petites bulles, et que toutes les impuretés solides eussent gagné le fond. M. Donny a bien voulu faire l'expérience à son laboratoire : la

(1) *Beiträge zur Physik und Chemie.* Frankfurt a. M., 1838, p. 13.

(2) *Ueber die Molecularwirkung der Flüssigkeiten.* (Bullet. de l'Acad. de Vienne, 1862, vol. XLVI, 2me section, p. 125).

charpente était celle d'un cube de 5 centimètres de côté ; le système laminaire ne s'est pas réalisé sans une certaine difficulté, et, lorsqu'on l'a obtenu complet, il était plus ou moins irrégulier ; mais, en le maintenant ensuite pendant quelques instants dans une étuve chauffée à 70° environ, et l'y retournant en différents sens, on a vu les irrégularités s'effacer. Dans le système tel qu'il s'est montré après cette dernière opération, les lames étaient fort transparentes, mais les arêtes n'avaient pas une grande finesse, et différaient, sous ce rapport, les unes des autres. Ce même système était très-solide, et s'est conservé pendant plus de deux ans, je pense ; après ce temps, un choc léger l'a réduit en fragments, d'où il faut conclure que la constitution de ses lames s'était lentement altérée. Je crois qu'on réussirait mieux encore et que l'altération progressive serait moindre, si l'on employait une proportion un peu plus forte de colophane. Rappelons ici la curieuse réalisation décrite par M. Mach (§ 210bis) du système du tétraèdre régulier en lames de caoutchouc.

§ 315. Terminons la partie de notre travail spécialement consacrée aux lames liquides, par un exposé succinct de tout ce qui, à notre connaissance, a été fait sur ces mêmes lames en dehors de nos propres recherches, jusqu'à la fin de 1869.

On lit dans les *Petites chroniques de la science* de M. Henry Berthoud (1) :

« Le musée du Louvre possède un vase étrusque de la plus haute antiquité, provenant de la collection Campana, et sur les flancs duquel se trouvent représentés des enfants qui soufflent dans des chalumeaux et qui s'amusent à faire des bulles de savon. »

(1) Année 1866, p. 265.

Il paraît donc que les anciens connaissaient les sphères laminaires complètes obtenues par insufflation à l'extrémité d'un tube; néanmoins leurs ouvrages ne contiennent, que je sache, rien ayant trait à ces bulles; ils parlent seulement des calottes laminaires développées à la surface de l'eau :

> Intumuit sic, ut pluvio perlucida cœlo
> Surgere bulla solet.....
>
> (OVIDE, *Métamorph.*, liv. X, v. 732.)
>
> ..... offensæ bulla tumescit aquæ.
>
> (MARTIAL, liv. VIII, épigr. 33, v. 18.)

§ 316. Suivant une hypothèse avancée d'abord par Halley, la vapeur d'eau visible, celle qui constitue les nuages et les brouillards, serait formée de très-petites bulles creuses, auxquelles on a donné le nom de vésicules. Cette hypothèse, fondée principalement sur la légèreté apparente des nuages et sur le fait qu'on n'observe jamais d'arc-en-ciel dans un nuage qui ne se résout pas en pluie, est bien connue des physiciens, et conséquemment je me bornerai ici à la mentionner ; mise en vogue par Saussure, elle a été fortement combattue depuis, et aujourd'hui elle n'a plus guère de partisans (§ 235)(1).

§ 317. Boyle paraît être le premier qui ait dirigé l'attention des savants sur les couleurs des lames minces, et spécialement des lames liquides. Dans un écrit(2) de l'année 1663, il s'exprime ainsi :

« Pour montrer aux chimistes qu'on peut faire appa-

(1) Pour juger de l'état actuel de la question, voir la dissertation inaugurale de M. Kober, publiée à Iena en 1872, et intitulée : *Ueber die angebliche Bläschenform des Wassers bei seiner Condensation.*

(2) *Experiments and observations upon colours.*

raître ou disparaître des couleurs là où il n'y a ni augmentation ni changement du principe sulfureux, salin ou mercuriel des corps, je ne recourrai pas à l'iris produit par le prisme de verre, ni aux couleurs qu'on voit, par une matinée sereine, dans celles des gouttes de rosée qui réfléchissent ou réfractent convenablement vers l'œil les rayons de la lumière ; mais je leur rappellerai ce qu'ils peuvent observer dans leurs laboratoires : car si l'on secoue une huile essentielle chimique ou de l'esprit-de-vin concentré, jusqu'à ce que des bulles se développent à sa surface, celles-ci offrent des couleurs brillantes et variées qui s'évanouissent toutes à l'instant où le liquide qui constitue les lames retombe dans le reste de l'huile ou de l'esprit-de-vin ; on peut donc faire en sorte qu'un liquide incolore montre des couleurs diverses et les perde en un moment, sans augmentation ni diminution de l'un quelconque de ses principes hypostatiques. Et, pour le dire en passant, il est digne de remarque que certains corps, soit incolores, soit colorés, étant amenés à une grande minceur, acquièrent des couleurs qu'ils n'avaient pas auparavant ; en effet, sans insister sur la variété de couleurs que l'eau rendue visqueuse par le savon acquiert lorsqu'elle est gonflée en bulles sphériques, la térébenthine, quand on y insuffle de l'air d'une certaine manière, fournit des bulles diversement colorées, et, bien que ces teintes s'évanouissent dès que les bulles éclatent, celles-ci continueraient probablement à manifester des nuances variées sur leur surface, si leur texture était suffisamment durable. »

Boyle cite comme exemple de ces couleurs permanentes, celles qu'il a vues sur des lames extrêmement minces de verre soufflé.

§ 318. En 1672, Hooke communiqua à la Société

Royale une curieuse Note[1], dont voici la traduction presque entière :

« Plusieurs petites bulles furent gonflées, au moyen d'un petit tube de verre, avec une solution de savon. On observa aisément qu'au commencement de l'insufflation de chacune d'elles, la lame liquide orbiculaire, qui emprisonnait un globe d'air, se montrait blanche et limpide, sans aucune apparence de couleur ; mais, après quelque temps, la lame s'amincissant par degrés (une partie de sa substance descendant vers le bas et une autre partie se dissipant dans l'air par l'évaporation), on vit naître sur sa surface toutes les variétés de couleurs qu'on peut observer dans l'arc-en-ciel... Après que ces couleurs eurent subi leurs derniers changements, la lame commença à se montrer de nouveau blanche, et alors, dans cette seconde lame blanche, apparurent, vers le haut et vers le bas, des trous, qui augmentèrent graduellement en diamètre, et plusieurs d'entre eux se confondirent, jusqu'à ce qu'à la fin ils devinssent très-grands. Il était singulier de voir comment ces trous étaient poussés çà et là, par les mouvements de l'air ambiant, sur le globe d'air emprisonné, sans que la bulle perdît sa forme orbiculaire ou tombât. Il est singulier aussi qu'après cela, quand la bulle éclate, sa rupture ait lieu avec une espèce d'explosion, en dispersant ses parties en une sorte de poussière ou de brouillard. Il est plus singulier que ces portions de la bulle qui se montrent comme des trous, en se mouvant de côté et d'autre sur la surface du globe aérien, changent de forme, et de circulaires deviennent elliptiques ou affectent des figures ondulées..... Il est plus singulier encore que, quoiqu'il soit très-certain que l'air enveloppant et l'air enveloppé ont des surfaces,

(1) *Birch, History of the Royal Society*, vol. III, p. 29.

cependant, par aucun des moyens dont j'ai fait usage, elles ne m'ont présenté ni la réflexion ni la réfraction que manifestent les autres parties de l'air emprisonné. Il est assez difficile d'imaginer quel curieux réseau ou corps invisible pourrait ainsi maintenir la forme de la bulle, ou quelle espèce de magnétisme pourrait empêcher la lame liquide de tomber ou les parties de l'air enveloppant et de l'air enveloppé de s'unir..... »

§ 319. En 1672 également, Newton, entre autres expériences sur la recomposition de la lumière, décrit la suivante[1] : on projette un spectre solaire sur la muraille d'une chambre obscure, et l'on expose à la lumière qu'il réfléchit une mousse blanche formée sur un liquide; si l'on observe cette mousse de très-près, ou mieux à travers une loupe, on distingue, sur chacune des petites lamelles, l'image des couleurs du spectre; mais si l'on s'éloigne, la mousse paraît entièrement blanche. Ou bien encore si, après avoir produit de la mousse sur de l'eau de savon, on attend que les lamelles commencent à crever, celles qui restent se montrent, quand on les regarde de près, spontanément teintes de couleurs variées, mais de loin on ne voit que du blanc.

Tous les physiciens savent que Newton a fait servir les bulles de savon à ses admirables recherches sur les couleurs des lames minces. Les expériences qu'il effectua par ce moyen, et qui sont décrites dans son *Optique*[2] (année 1704), sont trop connues pour que je les rappelle ici ; j'insisterai seulement sur les points suivants : Newton employait, non des bulles complètes, mais

(1) *Answer to some considerations upon his doctrine of light and colours* (Philos. Transact., vol. VII, p. 5084).

(2) Livre II, 1re partie, obs. 17 à 24.

des calottes laminaires reposant sur le liquide; il a observé la tache noire du sommet, les petites taches colorées qui montent et descendent sur la calotte, ainsi que les petites taches noires qui grimpent jusqu'à celle du sommet, à laquelle elles s'unissent; il n'a constaté l'apparition du bleu du 1er ordre qu'avec une solution très-chargée de savon, et, dans ce cas, il a vu quelquefois le bleu dont il s'agit envahir toute la calotte; enfin on peut inférer de sa description que l'uniformité de teinte, et conséquemment l'uniformité d'épaisseur de la lame, s'est montrée quelquefois aussi pour des couleurs autres que le bleu du 1er ordre.

§ 320. En 1730, Gray[1] voulant s'assurer si l'on pouvait communiquer de l'électricité aux liquides, suspend à des fils isolants une pipe dont l'orifice est tourné en bas, puis, après avoir gonflé une bulle de savon à cet orifice, il approche de l'extrémité libre du tuyau de la pipe un tube de verre électrisé par frottement, et il constate qu'un corps léger préalablement placé sous la bulle est attiré par elle.

§ 321. Leidenfrost qui, on le sait, a découvert le phénomène de l'état sphéroïdal des liquides, consacre une grande portion du Mémoire[2] où il expose ce sujet, à une étude détaillée des bulles de savon. Ce travail, publié en 1756, et dont j'ai déjà dit quelques mots au § 147, est un singulier mélange d'ingénieuses expériences et de déductions judicieuses avec quelques observations qui doivent être inexactes, et des opinions bizarres dont l'erreur est aujourd'hui évidente.

Si Leidenfrost s'occupe des bulles de savon, c'est, on

(1) *Philos. transact.*, vol. VI, 2me partie, p. 19.
(2) *De aquae communis nonnullis qualitatibus tractatus. Duisburg.*

aurait peine à le croire, en partie pour fournir une preuve ultérieure en faveur de cette proposition qu'il a précédemment soutenue, que l'eau peut passer à l'état solide sans l'action du froid. Pour lui, en effet, une bulle de savon, lorsqu'on a enlevé avec le doigt la goutte qui y demeure quelquefois suspendue, c'est-à-dire le liquide excédant la quantité précise nécessaire à sa formation, possède les propriétés des solides : 1° elle a par elle-même, comme eux, une figure déterminée ; 2° de même qu'on renferme un liquide dans un flacon de verre, de même aussi on peut renfermer dans la bulle, non un liquide, à cause de la fragilité de la lame, mais de la fumée de tabac, par exemple, fumée qui y demeure parfaitement emprisonnée comme dans une enveloppe de verre ; 3° la bulle, débarrassée de tout liquide excédant, est sèche, car elle ne mouille pas le doigt qui la touche ; 4° enfin si l'on dépose doucement sur une semblable bulle une petite goutte d'eau, celle-ci, loin de se mêler à la substance de la lame, glisse jusqu'au bas, comme elle glisserait sur du verre, et tombe ensuite ou peut être enlevée avec le doigt. D'après cela, comme un solide ne saurait couler, Newton doit s'être trompé en attribuant les couleurs de la bulle à ce que la lame s'amincit par l'écoulement graduel du liquide qui la constitue.

Cette nature solide de la lame s'explique de la manière suivante : dans les liquides, les molécules sont attirées également de tous les côtés, de sorte qu'elles sont également mobiles dans tous les sens, tandis que, dans les solides, il y a des centres particuliers d'attraction qui font que les molécules se groupent d'une manière déterminée, comme on le voit dans les cristaux ; de là résulte qu'il suffit d'un certain mouvement, d'une certaine direction imprimée aux molécules d'un liquide pour déterminer chez elles l'arrangement qui fait passer le corps à l'état solide. C'est ainsi que l'araignée et les chenilles, en expulsant par leurs filières, dans une direction commune, les molécules d'une substance liquide, changent celle-ci en une matière solide, et c'est encore ce qui se produit quand on gonfle une bulle.

A propos de la bulle pleine de fumée, Leidenfrost dit : « .... sur une bulle ainsi rendue opaque au moyen d'une fumée intérieure, les couleurs décrites par Newton sont réfléchies avec beaucoup plus d'éclat, de sorte que la bulle ressemble à un astre brillant; mais toute cette gloire s'évanouit à l'instant de la rupture : la fumée fétide qui s'échappe alors apprend de quelle ordure la bulle était remplie, et cette dernière nous offre ainsi un emblème frappant des misères dorées de l'humanité. »

Il signale la grande élasticité des bulles, celles-ci reprenant toujours spontanément leur forme sphérique dès que la cause extérieure qui la leur avait fait perdre vient à cesser.

On lui doit aussi l'observation du fait important que les bulles persistent bien plus longtemps en vase clos qu'à l'air libre : les siennes avaient environ 5 centimètres de diamètre, il les gonflait à l'intérieur d'un ballon de verre, et elles se maintenaient au delà d'une heure. Il attribue cette grande persistance à ce que les bulles sont alors soustraites aux agitations de l'air ambiant et à toutes les causes accidentelles de rupture. Il énonce, du reste, cet autre fait, que les bulles durent d'autant plus qu'elles sont plus petites : il en a réalisé qui n'avaient guère que $\frac{1}{3}$ de millimètre en diamètre, et elles se sont conservées plus de deux jours à l'air libre et pendant l'été.

Le premier encore il a remarqué que lorsque, après avoir gonflé une bulle à l'extrémité d'un tube, on laisse ouvert l'autre bout de celui-ci, la bulle diminue graduellement de grosseur, avec une vitesse accélérée, jusqu'à s'annuler, en chassant par le tube l'air qu'elle renfermait; il dit, en outre, que si l'on a rempli la bulle de fumée, on voit cette dernière sortir du tube comme d'une cheminée. Il conclut de là que la bulle fait constamment effort pour se contracter. Il ajoute les observations suivantes :

La bulle, au commencement de sa formation, tant qu'elle ne montre pas de vives couleurs, est à la fois si molle et si tenace, qu'on peut y faire pénétrer et en retirer impunément une pointe solide, même obtuse; l'ouverture se referme toujours spontanément. Mais plus les couleurs prennent d'éclat, plus la lame devient rigide, de sorte que si on la perce, elle se brise. C'est surtout dans les taches noires que cette rigidité est extrême : là le moindre contact d'une pointe d'aiguille suffit pour déterminer la rupture; alors la bulle éclate avec un bruit perceptible, et se dissipe en une infinité de très-petites parties projetées de tous les côtés jusqu'à trois ou quatre pieds de distance. Ce phénomène se constate le mieux dans un rayon de soleil; il est tout à fait analogue à celui que présentent les larmes bataviques. Ainsi la bulle, outre sa force contractile, possède en même temps une force opposée, une force explosive. Cette dernière force agit toujours de dedans en dehors, car si à l'intérieur d'une bulle on en gonfle une autre, la rupture de celle-ci fait éclater l'extérieure, tandis que si l'extérieure se brise la première, elle laisse l'autre parfaitement intacte. Il y a donc, dans une bulle, deux forces contraires, l'une centripète, qui réside surtout dans les portions incolores, l'autre centrifuge, qui a son siége dans les portions colorées, et qui est à son maximum dans les taches noires.

La force explosive est d'autant plus intense que la solution contient une plus forte proportion d'eau, car la bulle éclate d'autant plus tôt et lance d'autant plus loin les particules dans lesquelles elle se résout; en même temps la force contractile est d'autant plus faible. Au contraire, plus il y a de savon, moins la force explosive a d'intensité, et plus est énergique la force contractile (1). De là la conséquence que la force explosive provient de l'eau, et la force contractile du savon, ou plutôt de l'huile de ce dernier, les bulles variant en persistance suivant la nature de l'huile qui entre dans la composition du savon.

Dès que la lame qui constitue une bulle passe à l'état solide, il s'y produit une séparation de ses éléments, et alors elle se trouve formée de trois membranes superposées; l'extérieure consiste dans la partie huileuse du savon; c'est elle qui possède la force contractile; elle protége les deux autres contre la rupture, car c'est pendant qu'elle s'étend encore sur la totalité de la bulle, que celle-ci est difficile à briser. Mais bientôt cette membrane extérieure perd son égalité, s'ouvre du haut, descend en devenant graduellement plus épaisse vers le bas, et laisse ainsi à découvert la partie supérieure de l'ensemble des deux autres; on doit conclure de cette descente progressive et de cette accumulation au bas, que la membrane en question n'est pas véritablement solide; enfin

(1) Ces dernières observations sont évidemment en partie inexactes : la force contractile, c'est-à-dire la tension, ne peut augmenter, et doit plutôt diminuer quand on augmente la proportion de savon (§ 299); Leidenfrost, qui ne donne aucune mesure à cet égard, juge sans doute du plus ou moins d'intensité de la force dont il s'agit, uniquement par le plus ou moins de persistance de la bulle.

c'est à elle que sont dues les couleurs. La membrane intermédiaire, qui est saline et en partie terreuse, se montre toujours blanche, mais sans beaucoup d'éclat; elle s'ouvre ensuite à son tour, et met à nu des portions de la plus intérieure. Celle-ci est d'une transparence extrême, ne réfléchit aucune couleur, et, pour ainsi dire invisible, paraît comme une tache noire; elle est tout entière aqueuse.

Pour établir que la membrane extérieure est de nature huileuse, Leidenfrost se fonde surtout sur les apparences successives que présentent les portions colorées dans une bulle gonflée avec une solution contenant peu de savon; il affirme que, lorsque toute la substance de cette membrane s'est rassemblée au bas de la bulle, son seul aspect montre qu'elle est formée d'une matière grasse. Il indique, en outre, l'expérience suivante : si l'on trempe dans la solution l'orifice d'un large tube, puis qu'on l'en retire, on le trouve occupé par une lame plane, et si l'on place cette lame verticalement, on ne tarde pas à y voir naître des couleurs qui manifestent d'une manière indubitable la séparation des trois membranes. Leidenfrost a donc réalisé des lames planes, et en a observé les bandes colorées. C'est encore, dit-il, par la même raison que les couleurs apparaissent plus tôt et plus vivement aux températures basses de l'hiver, l'huile se séparant plus aisément par le froid. D'après lui, si l'on emploie un liquide dans lequel les parties huileuse, saline et aqueuse sont unies avec plus de force que dans l'eau de savon, de sorte que la séparation de l'élément graisseux ne puisse s'effectuer, on ne distingue plus de couleurs. Comme exemples de semblables liquides, il cite surtout la salive d'un homme jeune, sain et à jeun, et une solution de savon à laquelle on a ajouté un peu d'esprit-de-vin. Il infère de tout cela que, très-probablement, l'eau parfaitement pure ne peut jamais donner de lames colorées.

Il indique comme preuve ultérieure de l'erreur commise, selon lui, par Newton, en ce qui concerne la génération des couleurs, que les taches noires, au lieu de se fondre insensiblement dans le blanc qui les entoure, sont nettement terminées à leurs bords, et qu'elles naissent non-seulement au haut de la bulle, mais aussi sur les côtés.

Il mesure, par un moyen simple indépendant des couleurs, l'épaisseur de la lame au moment où la bulle vient d'être formée : il se sert, pour gonfler celle-ci, d'un tube de thermomètre, et trouve qu'en employant seulement la quantité de liquide qui s'élève dans ce tube par la capillarité, la bulle, dont le diamètre maximum est de deux pouces, ne porte aucune goutte suspendue ; il considère l'épaisseur de la lame comme étant alors uniforme, et il l'évalue d'après le diamètre de la bulle et le poids du liquide que contenait le tube ; il obtient de cette manière $\frac{1}{15624}$ de pouce (environ $\frac{1}{600}$ de millimètre).

Partant toujours de son principe des trois membranes et de l'idée que la plus intérieure n'est formée que d'eau pure, il calcule, par le même procédé, l'épaisseur de cette dernière, connaissant la proportion d'eau de la solution, et trouve cette épaisseur égale à $\frac{1}{17577}$ de pouce (environ $\frac{1}{670}$ de millimètre) ; or, comme ses bulles ont leur diamètre maximum, de telle sorte qu'elles éclatent et se réduisent en une espèce de poussière si l'on continue à souffler, il en conclut que, jusqu'à cette limite de minceur seulement, les molécules d'eau peuvent demeurer unies, et qu'ainsi le diamètre d'une de ces molécules n'excède pas la valeur ci-dessus. Il déduit de la même méthode encore que le diamètre des molécules de l'huile n'est pas supérieur à $\frac{1}{303851}$ de pouce (environ $\frac{1}{12000}$ de millimètre). Leidenfrost a donc eu la pensée de chercher des limites supérieures aux diamètres moléculaires.

Il avance que la lame qui constitue une bulle a des pores d'une grandeur notable, et il essaie de le prouver par les deux observations suivantes, qui sont évidemment erronées : quand on commence à gonfler une bulle, une grande partie de l'air qu'on y fait entrer s'échappe par ces pores, car, si l'on souffle avec force, un courant d'air perceptible se fait sentir à l'extérieur de la bulle; de la fumée introduite ne passe pas ainsi au dehors, mais si une bulle qui ne contient que de l'air est maintenue au-dessus de la flamme d'une lampe, la fumée noire de celle-ci pénètre à travers la lame, et rend opaque l'air intérieur.

Leidenfrost voit des lames et des bulles partout : pour lui, l'air atmosphérique est composé de petites bulles, ou plutôt de petites lamelles aqueuses; c'est une sorte de mousse qui s'est élevée de la surface des eaux; enfin les animaux et les plantes sont formés de petites bulles de savon et de petits tubes de la même matière. On me permettra de passer sous silence les motifs sur lesquels il appuie de semblables opinions.

§ 322. Dans un Mémoire probablement écrit en suédois à une époque un peu antérieure, mais qui a paru en français[1] en 1773, Wilke décrit ce qu'on observe sur des bulles de savon gonflées à une température très-basse. Il s'exprime ainsi : « Si l'on forme ces bulles à un air assez froid pour les congeler, on y voit les

(1) *Sur la forme de la neige* (JOURN. DE PHYS. DE L'ABBÉ ROZIER, t. I, p. 106).

petites particules de neige qui se condensent et flottent librement sur la bulle, sous la forme de petites étoiles.... Le temps le plus propre à souffler les bulles est le moment où l'eau de savon commence à geler. Les étoiles paraissent d'abord sous la forme de petits points, d'où l'on voit ensuite sortir les rayons peu à peu. Ces étoiles sont ordinairement hexagones. On voit ici la même étoile passer par une suite de figures différentes, dont la plupart ont déjà été observées dans la neige naturelle.... Plus le mélange est clair et le savon dissous, plus les étoiles sont délicates et nombreuses; elles croissent alors promptement, et les bulles éclatent. Celles qui sont faites avec un mélange plus épais, sont moins étoilées; mais elles durent plus longtemps, et on les observe mieux, quoique les figures soient moins distinctes.... Ceux qui répèteront ces expériences y découvriront une infinité de petits détails curieux et amusants. »

§ 322^bis^. En 1782, Cavallo[1] a communiqué à la Société Royale de Londres une expérience consistant à gonfler des bulles de savon avec de l'hydrogène, bulles qui s'élevaient d'elles-mêmes dans l'air. Ce furent là, comme il le dit, les premiers aérostats.

§ 322^ter^. Passons au siècle actuel. En 1819, Belli a mentionné[2] le fait suivant : lorsqu'un petit jet d'eau est lancé obliquement de bas en haut par un orifice situé sous la surface de l'eau, tout l'espace compris entre cette surface et la courbe du jet est occupé par une lame liquide, et le jet s'élève moins haut que si l'orifice s'ouvrait dans l'air.

(1) *The elements of natural or experimental philosophy*. Londres, 1803, vol. IV, p. 319.

(2) *Di alcuni fenomeni prodotti nel moto de' liquidi dall' attrazione molecolare*. (Journ. de Brugnatelli, 2e décade, t. II, p. 232).

§ 323. En 1820, Morey annonça(1) qu'on peut gonfler avec de la résine fondue, des bulles dont les dimensions atteignent celles d'un œuf, et qui présentent des couleurs. D'après lui, on obtient ainsi, en général, une file de bulles dont chacune est attachée à la suivante par un mince filet ; il ajoute qu'il en conserve depuis huit mois sans qu'elles aient subi d'altération. Il raconte ensuite qu'une petite fille accourut un soir vers lui et lui montra une semblable file parfaitement régulière de 22 à 23 petites bulles, ayant chacune environ un tiers de pouce (8^{mm}) de longueur et un quart de pouce (6^{mm}) de largeur ; les minces filets intermédiaires avaient, en longueur, moins d'un huitième de pouce (3^{mm}). Morey déclare qu'il n'a aucune idée de la cause qui produit cette succession alternative de bulles et de filets. Nous nous en occuperons plus loin (§ 501).

§ 324. Les années 1819 à 1844 nous fournissent une suite de Mémoires fort remarquables de Fusinieri(2). Ces Mémoires contiennent, comme celui de Leidenfrost, avec d'excellentes observations, une théorie difficilement acceptable. Voici, en ce qui concerne les lames liquides, un résumé des recherches dont il s'agit ; je le rédige, non d'après les Mémoires mêmes, ne les ayant pas eus à ma disposition, mais d'après un exposé détaillé qu'en donne

(1) *Bubbles blown in melted rosin.* (Journ. de Silliman, 1re série, vol. II, p. 179).

(2) *Ricerche sui colori delle lamine sottili e sui loro rapporti coi colori prismatici* (Journ. de Brugnatelli, 1819, t. II, p. 319).

Memoria sopra i fenomeni chimici delle lamine sottili (Ibid., t. IV, 1821, pp. 133, 209, 287, 380 et 442).

Della forza di repulsione che si sviluppa fra le parti dei corpi ridotti a minime dimensioni, ossia del calorico di spontanea espansione in lamine sottili (Ibid., t. VI, 1823, p. 34).

Come la forza repulsiva della materia attenuata agisca all'atto della rottura di bolle o lamine piane di soluzione di sapone (Ann. delle scienze del Regno Lombardo-Veneto, t. XIII, 1844, p. 213 et app.).

M. Dal Pozzo di Mombello, dans un ouvrage imprimé à Foligno en 1866, et intitulé : *La Dinamica molecolare secondo Fusinieri e Reichenbach.*

Fusinieri, dont je ne connaissais pas les travaux quand j'ai effectué mes expériences sur les petites calottes laminaires, avait nettement reconnu l'inversion des teintes dans les calottes de certains liquides développées à l'air libre, l'extrême rapidité avec laquelle se produit ce genre de coloration, les mouvements de trépidation des zones, la persistance plus grande, pour ces mêmes liquides, lorsque l'évaporation est libre, etc.

Il a le premier réalisé de grandes lames planes : afin d'étudier la succession et la disposition des teintes, il plonge dans une solution de savon le bord d'une cloche de verre, qui peut avoir jusqu'à 15 centimètres de diamètre, puis le retire, et le trouve occupé par une lame plane ; il couche la cloche et la place près d'une fenêtre, de manière que la lame soit verticale et bien éclairée, et il exclut, au moyen d'écrans noirs, toute lumière étrangère. Dans ces conditions, les phénomènes sont d'une très-grande régularité, et Fusinieri décrit avec soin la formation et la succession des bandes colorées horizontales, ainsi que l'apparition et l'extension du segment noir supérieur. Pour ces expériences, il réalise aussi des lames planes d'eau de savon dans un anneau métallique de 5 à 7 centimètres de diamètre, qu'il installe verticalement sous une cloche de verre, afin de l'abriter des agitations de l'air ; quand cet anneau n'a pas plus de 5 centimètres, le noir finit par envahir la totalité de la lame.

Il examine les lames d'un grand nombre de liquides, tant lorsqu'elles sont produites par étalement sur un autre liquide, que lorsqu'elles ont leurs deux faces dans l'air. Pour cette dernière condition, il les réalise, d'une part, à l'état de petites calottes, et, d'autre part, sous la forme plane dans de petits cadres métalliques ; il étudie avec un soin minutieux toutes les particularités que présentent ces diverses lames, et de l'ensemble de ses observations il déduit la théorie dont nous allons rendre un compte succinct.

Disons d'abord qu'il appelle lames cunéiformes celles dont les deux faces vont en se rapprochant, de manière à former un angle très-aigu ; telle est, par exemple, dans une lame verticale où s'est formé le segment noir, la portion composée de l'ensemble des zones colorées ; il nomme coins capillaires les petites masses à courbures transversales concaves qui rattachent soit une lame plane au cadre solide, soit une calotte laminaire à la surface du liquide. Ces termes admis, voici les points principaux de la théorie en question, avec une partie des faits sur lesquels elle s'appuie :

Une gouttelette d'une huile fixe ou d'un liquide combustible qui ne se mêle pas à l'eau (huiles essentielles, sulfure de carbone, etc.), s'étend en lame mince tant sur la surface du mercure que sur celle de l'eau ; seulement, toutes choses égales d'ailleurs, le phénomène s'effectue avec moins de vitesse sur le mercure ; mais, dans les deux cas, il est trop rapide pour qu'on puisse l'attribuer à la pesanteur ; on ne peut le regarder non plus comme dû à une attraction de l'un des liquides pour l'autre, car cette attraction n'agirait que dans des directions normales à la surface du liquide sous-jacent, et non dans celle de cette surface même ; en outre, elle devrait s'exercer avec plus d'énergie, et donner lieu ainsi à une extension plus rapide et plus grande, sur le mercure, à cause de la forte densité de celui-ci, tandis que c'est le contraire qu'on observe. Il faut donc reconnaître que l'extension résulte d'une cause intérieure au liquide de la gouttelette, d'une tendance spontanée à la dilatation, tendance qui ne peut provenir que d'un développement de calorique; si l'on veut, cette tendance naît de la force répulsive ordinaire du calorique, laquelle agit plus librement dans une masse ainsi atténuée.

Quand une lame ou une portion de lame est cunéiforme, la force en question chasse les molécules liquides vers l'arête du coin, dans des directions normales à celle-ci, et, toutes choses égales d'ailleurs, avec d'autant plus d'énergie que le coin est moins aigu.

Si aucun obstacle ne s'oppose à cette action, elle produit simplement l'extension de la lame; c'est le cas d'une gouttelette liquide déposée sur un autre liquide. Si quelque cause entrave l'extension, des phénomènes différents se produisent: dans certaines circonstances, des courants visibles de liquide se détachent continuellement de l'arête du coin suivant les directions indiquées plus haut; tel est le cas d'une calotte laminaire présentant les teintes inverses; dans une semblable calotte, il y a deux coins opposés l'un à l'autre, savoir le coin capillaire qui relie la calotte au liquide sur lequel elle repose, et la portion colorée de la lame, dont l'épaisseur va en croissant jusqu'au sommet; chacun de ces coins tend à chasser un courant de liquide vers l'autre, mais le coin capillaire étant beaucoup moins aigu, son action l'emporte, et il n'y a qu'un seul courant, dirigé de bas en haut; c'est celui-ci qui engendre le coin supérieur, et le soutient contre l'action de la pesanteur; c'est lui également qui répare sans cesse la perte de liquide que ce coin supérieur éprouve par l'évaporation.

Si l'on couvre avec une plaque de verre la capsule où l'on a développé la calotte, et si les choses sont disposées de manière que le sommet de cette calotte ne soit qu'à une petite distance de la plaque, l'inversion des teintes disparaît, et la calotte éclate plus tôt : c'est qu'alors la vapeur émanée de la lame ne peut plus s'échapper, et exerce, par son propre calorique, une action neutralisante sur la force expansive de celui de la lame, de sorte que la pesanteur reprend ses droits. Cette influence de la présence d'une plaque solide au-dessus de la calotte vient, remarquons-le, à l'appui de la théorie de M. Van der Mensbrugghe (§ 256) sur l'inversion des teintes.

Dans d'autres circonstances, non-seulement l'extension ultérieure d'une lame déjà cunéiforme est entravée, mais il y a, en outre, obstacle à l'émission des courants ci-dessus; c'est ce qui a lieu, par exemple, à l'égard d'une lame verticale ou inclinée d'eau de savon, quand la zone noire se développe, cette zone opposant une résistance à la production des courants dont il s'agit. Alors, dans la portion cunéiforme, la force expansive du calorique ne pouvant déterminer ni l'extension ultérieure générale ni une expulsion de courants, occasionne des extensions partielles alternant avec des gonflements : tels sont les têtards; la tête de ceux-ci est formée d'une petite portion circulaire amincie entourée d'un petit bourrelet saillant, lequel est lui-même entouré d'un anneau étroit aminci, et leur queue présente les mêmes alternatives de dépressions et de saillies. Tant dans les portions déprimées que dans les portions gonflées, la force expansive du calorique a écarté les molécules, et conséquemment le têtard entier est spécifiquement plus léger que le liquide environnant; aussi tous ont un mouvement ascensionnel dans la lame.

Fusinieri applique encore son principe au fait de la disparition instantanée des lames liquides qui se rompent. Selon lui, lorsqu'une lame se brise, et qu'ainsi le lien de la viscosité, qui maintenait le liquide à l'état laminaire, est enlevé, la force expansive, dirigée auparavant dans le sens de la surface de la lame, se dirige dans tous les sens, transforme le liquide en vapeur, et imprime aux molécules des mouvements violents de projection, accompagnés de décomposition avec dégagement de gaz ; on s'assure de ce dégagement en ce que, après la rupture, on observe, sur le bord solide auquel était attachée la lame, une certaine quantité de minimes bulles creuses.

Fusinieri fait remarquer qu'on ne peut attribuer cette sorte d'explosion à la compression de l'air emprisonné dans une bulle, car le même phénomène se produit à l'égard des lames planes, et d'ailleurs on ne voit pas comment une enveloppe aussi peu résistante serait capable de contenir un gaz assez comprimé pour donner lieu à un semblable effet.

Certes, la théorie de Fusinieri ne saurait être admise ; mais elle est ingénieuse, présentée avec habileté, et étayée d'une foule de petits faits dont nous n'avons pu indiquer que les plus saillants. La véritable théorie de tous les phénomènes de mouvement qui se manifestent dans les lames liquides, n'existe pas encore; mais le physicien qui voudra la chercher, devra nécessairement étudier les travaux de Fusinieri, s'il ne veut s'exposer à décrire comme nouvelles des particularités déjà connues.

Citons, en terminant cette analyse, une observation importante et curieuse : Fusinieri produit une lame verticale d'une solution assez concentrée de savon, dans un cadre métallique rectangulaire de 8 centimètres de base et de 2 de hauteur, et il la couvre d'une cloche de verre.

Dans ces conditions, outre une série de mouvements et de changements de teintes qu'offrent de petites portions colorées, il constate le phénomène suivant : quand la zone noire se développe, elle est contiguë à une zone blanche ; mais du bord supérieur de celle-ci descendent de petites gouttelettes jaunes suivies de longues queues, le blanc se détruit ainsi graduellement, et le noir se trouve alors limité par le jaune du premier ordre; celui-ci se détruit à son tour de la même manière, mais les gouttelettes descendantes sont pourpres; les zones suivantes éprouvent, les unes après les autres, une semblable destruction, jusqu'à ce que le noir soit contigu à une zone du troisième ordre. Ce point atteint, la portion colorée de la lame s'amincit par l'action de la pesanteur, les couleurs des premiers ordres y reparaissent, puis sont successivement détruites comme précédemment.

§ 325. En 1829 ou 1830, Pfaff[1] a étudié, comme Wilke, les effets de la congélation sur les lames d'eau de savon. Pendant un hiver très-froid, il développe, en opérant dans une chambre chauffée, une lame transversale à l'intérieur d'un flacon de 4 à 7 pouces (10 à 17 centimètres environ) de diamètre, hermétiquement bouché; il transporte ensuite ce flacon à l'extérieur d'une fenêtre, où la température est d'environ 10° au-dessous de zéro, et il observe la formation des petits cristaux de glace dans la lame. Il voit d'abord les couleurs de celle-ci se troubler, puis il assiste à la génération des cristaux, lesquels se montrent reposant sur un fond noir. Pfaff se livre à des conjectures, inutiles à rapporter ici, sur la nature de ce fond noir qui est constitué, comme il le remarque, par une partie de la solution incristallisable

(1) *Ueber die krystallinischen Verhältnisse des Dunst-Blättchens* (Mém. de l'Acad. de Münich, 1829-30, p. 77).

à la température où se fait l'expérience ; mais ce qui est à noter, c'est qu'il constate que de semblables lames peuvent persister plusieurs jours. Il n'a pu observer la congélation dans la plus grande lame, celle de 7 pouces de diamètre, cette lame éclatant toujours avant l'apparition des cristaux.

§ 326. J'ai dit (§ 149), que, dans un Mémoire de 1830, le Dr Hough paraît être amené à l'idée de la tension des surfaces liquides, uniquement en partant de la forme sphérique des gouttes liquides et des bulles de savon ; que cette idée le conduit à celle d'une pression exercée sur l'air intérieur par la lame qui constitue une bulle ou une calotte, mais qu'en cherchant la loi qui lie cette pression au diamètre, il se trompe complétement.

J'ajoute ici qu'il a observé la petite masse à courbures transversales concaves qui garnit le bord des calottes laminaires; il a constaté, en outre, que ces calottes manifestent les attractions et répulsions apparentes des corps légers flottants.

Les §§ 230 à 232 contiennent le résumé des belles expériences de Savart, publiées en 1833, sur le développement de grandes lames de différentes formes par le choc de la partie continue d'une veine liquide contre un petit disque solide, et par le choc mutuel des parties continues de deux veines directement opposées.

§ 327. Dans son ouvrage sur la cohésion[1], publié en 1835, Frankenheim avance que si une série de plaques solides horizontales, dont la supérieure seule est fixe, sont disposées les unes sous les autres avec des couches d'eau interposées, la colonne semi-liquide ainsi formée pourra avoir une assez grande longueur sans

(1) *Die Lehre von der Cohäsion.* Breslau ; §§ 69 à 76.

cesser de demeurer suspendue à la plaque fixe : si, par exemple, les couches d'eau n'ont que $0^{mm},1$ d'épaisseur, l'équilibre se maintiendra tant que la somme des poids de toutes les plaques, sauf la supérieure, et de toutes les couches d'eau, ne dépassera pas celui d'une colonne d'eau de même diamètre et de 150^{mm} de hauteur. Frankenheim compare alors à cette disposition en couches alternativement solides et liquides, la constitution intérieure des lames formées d'un liquide auquel on a ajouté quelques parties solides, telles que les lames d'eau de savon, bien que, comme il le remarque, l'analogie ne soit pas complète; selon lui, ce sont les particules solides tenues en suspension dans le liquide, et non les particules dissoutes, qui donnent à ce liquide la propriété de se laisser développer en lames ; elles servent de points d'appui au liquide, comme les plaques solides ci-dessus; aussi ne doivent-elles se trouver ni en trop grande ni en trop petite proportion; c'est ainsi que, pour donner les plus grosses bulles, l'eau ne doit contenir ni trop ni trop peu de savon. Frankenheim compare aussi ces lames aux membranes et au vaisseaux d'origine organique, lesquels, dit-il, sont primitivement semi-liquides et se solidifient plus tard par la perte du liquide et le rapprochement des parties solides.

J'ai rappelé au § 239 les résultats obtenus, en 1836, par Le François à l'égard de la lame à bord rectiligne oblique que j'avais décrite, et qui se forme quand un liquide s'échappe d'une fente rectiligne étroite percée dans la paroi latérale du réservoir depuis le fond de celui-ci jusqu'au-dessus du niveau.

§ 328. En 1836 et 1837, M. Draper a fait connaître de curieuses expériences sur le passage des gaz à travers les lames liquides. Les premières, qui ont été exposées dans le Journal américain des sciences médicales et dans le Journal de l'Institut Franklin, consistent à gonfler, avec un certain gaz, une bulle de savon dans une atmosphère d'un autre gaz ; la bulle alors augmente ou diminue graduellement en diamètre, et le phénomène s'arrête lorsque la composition des gaz des deux côtés de la membrane liquide est devenue la même. Les gaz employés sont, par exemple, le protoxyde d'azote à l'intérieur et l'azote à l'extérieur ; dans ce cas, la bulle va en diminuant. L'auteur varie l'expérience de la manière suivante (1) : on fait en sorte qu'une lame plane d'eau de savon occupe l'orifice d'un petit bocal de la contenance d'environ 60 centimètres cubes, puis on place ce bocal dans une atmosphère de protoxyde d'azote ; après quelques secondes, on voit la lame se bomber vers l'extérieur, et, en une ou deux minutes, constituer la plus grande partie d'une sphère de 6 centimètres de diamètre.

J'ai rapporté, au § 307, le procédé du Dr Reade (année 1837) pour rendre très-durables les lames d'eau de savon, procédé se réduisant à développer ces lames dans une atmosphère uniquement formée de vapeur d'eau à saturation.

En 1840, le Dr Reade est revenu (2) sur ces mêmes lames : il cherche à prouver, par une suite d'expériences, que les diverses couleurs des lames liquides ne proviennent pas de différences d'épaisseur. Par exemple, après avoir réalisé une lame par le procédé en question, il incline le flacon qui la contient, et attend qu'elle soit devenue entièrement noire ; alors il donne au flacon un certain mouvement de va et vient dans le sens hori-

(1) *Gazeous diffusion* (Philos. Magaz., nouvelle série, vol. XI, p. 559).

(2) *Remarks on the permanent soap film and on thin plates* (Ibid, vol. XVII, p. 32).

zontal, et bientôt la lame se trouve parsemée d'une multitude de points blancs, qui se réunissent en bandes colorées, lesquelles se formant presque simultanément, ne peuvent, dit-il, être engendrées par un fluide descendant.

L'auteur part de là pour avancer, sur la cause des couleurs en général, une théorie que nous n'avons pas à reproduire.

§ 328bis. Brewster a étudié[1], en 1841, les apparences curieuses, qui se manifestent lorsqu'on éclaire par de la lumière polarisée une lame liquide présentant des couleurs en anneaux ou en autres figures, et qu'on fait varier l'azimut du plan de polarisation, l'angle d'incidence sur la lame, la nature du liquide dont cette lame est formée, etc. Quand la lame repose sur une surface solide ou liquide, comme dans le cas de l'étalement d'une gouttelette d'huile essentielle sur l'eau, Brewster constate des disparitions et réapparitions successsives des anneaux, avec des passages de systèmes ou portions de systèmes d'anneaux à centre noir à des systèmes ou portions de systèmes à centre blanc, et vice versa, etc. Quand, au contraire, la lame a ses deux faces dans l'air, les phénomènes ci-dessus ne se montrent pas : les figures conservent la disposition de leur teintes; si ce sont des anneaux, ils sont toujours à centre noir, et il n'y a d'autre disparition que celle qui se produit lorsque la lumière frappe la lame sous l'angle de polarisation du liquide. L'auteur donne la raison théorique de tous ces phénomènes.

Enfin si l'on reçoit dans l'œil non le faisceau réfléchi, mais le faisceau transmis par la lame, et si cette lame

(1) *On the phenomena of thin plates of solid and fluid substances exposed to polarized light* (Philos. Transact., 1841, p. 43).

montrait par réflexion une teinte uniforme, on observe, en employant un analyseur, soit des zones colorées, soit un système d'anneaux à centre noir ou à centre blanc; si la lame est assez épaisse pour paraître incolore, elle dépolarise le faisceau transmis.

J'ai mentionné, au § 314, les bulles grosses et très-persistantes que M. Böttger a gonflées (année 1838) avec un mélange fondu de colophane et d'huile de lin.

§ 329. En 1843, Marianini a décrit[1] une expérience intéressante, où se produit, en outre, un fait analogue à ceux signalés par M. Draper : on laisse tomber une bulle de savon, gonflée avec la bouche, dans une large éprouvette en verre remplie aux deux tiers environ de gaz acide carbonique; après quelques oscillations, cette bulle demeure suspendue ; mais bientôt on la voit augmenter en diamètre, et descendre au fur et à mesure, jusqu'à ce qu'elle éclate. En disparaissant, elle lance dans toutes les directions une quantité de petites gouttelettes qui vont arroser les parois du vase. Marianini tire de ce dernier fait la conséquence que le gaz contenu dans la bulle est dans un état de compression.

Il s'exprime ainsi au commencement de l'article : « Pour rendre sensible la grande différence de densité qui existe entre l'air atmosphérique et le gaz carbonique, on fait depuis longtemps, dans les cours de physique, l'expérience suivante. » L'idée ingénieuse de faire flotter une bulle de savon sur le gaz carbonique paraît donc ne pas être due à Marianini ; j'ignore quel en est l'auteur, et à quelle époque elle a été mise en avant.

§ 330. On a vu, aux §§ 116, 118 et 151, que M. Henry, dans une communication verbale de 1844, regarde la

(1) *Sur un phénomène offert par les bulles de savon flottant sur le gaz carbonique* (Ann. de Chim. et de Phys. de Paris, 3e série, t. IX, p. 382).

tension des surfaces liquides comme déterminant la forme sphérique des bulles laminaires, par la condition du minimum de surface ; qu'il fait dépendre de la même cause la pression exercée sur l'air intérieur, pression dont il énonce le rapport inverse au rayon de la bulle ; qu'il indique comme manifestation curieuse de la tension et de la pression qui en est la conséquence, le retrait rapide de la lame et le courant d'air intense qu'on reçoit au visage quand, après avoir gonflé une grosse bulle à l'extrémité d'un large tube, on ôte celui-ci de la bouche ; qu'il a mesuré cette même pression à l'aide d'un manomètre à eau; enfin qu'il s'est légèrement trompé en attribuant toute l'action à la surface extérieure de la bulle.

M. Henry avait fait, peu de temps auparavant, une première communication concernant des mesures approximatives de la cohésion des liquides : il a cherché à évaluer cette cohésion dans l'eau de savon « en pesant la quantité d'eau qui adhérait à une bulle de cette substance immédiatement avant la rupture, et en déterminant l'épaisseur de la lame par l'observation de la couleur qu'elle présentait, d'après l'échelle des lames minces de Newton. » Je traduis ici littéralement le passage du compte rendu, parce qu'il n'est pas clair. M. Henry conclut de ses expériences que la cohésion de l'eau, loin d'être aussi faible qu'on le croyait, s'élève à plusieurs centaines de livres par pouce carré, et est probablement égale à celle de la glace.

J'ajoute à ce que j'ai dit relativement à la seconde communication, que, dans ses mesures de la pression au moyen du manomètre à eau, M. Henry estime de la même manière l'épaisseur de la lame immédiatement avant la rupture, et arrive également, par ce mode d'expérimentation, à des valeurs approchées de la cohésion, valeurs qui sont de l'ordre de celles qu'il avait déduites des pesées. Il a employé, dit le compte rendu, pour mesurer la ténacité de la lame, plusieurs autres méthodes, dont les résultats généraux ont encore été les mêmes.

§ 331. En 1845, M. Melsens[1] est parvenu à réaliser de petites bulles creuses de mercure; il fait tomber, d'une hauteur suffisante, sur un bain de mercure recouvert d'une couche d'eau de 4 à 5 centimètres d'épaisseur, un filet de ce dernier liquide, de telle manière que des bulles d'air soient entraînées avec assez de force pour pénétrer sous la surface du métal; ces bulles alors, en remontant, se revêtent d'une mince pellicule de celui-ci, et viennent, en cet état, flotter à la surface de l'eau, où elles persistent assez longtemps pour être aisément observées; le diamètre des plus grosses peut atteindre 15^{mm}.

On comprend sans peine pourquoi, dans cette expérience, les bulles d'air qui remontent à la surface du mercure ne se bornent pas à y développer des calottes sphériques laminaires, mais poursuivent leur marche ascensionnelle en emportant des sphères laminaires complètes: chaque bulle d'air, après avoir formé une calotte mercurielle, demeure soumise, de la part de l'eau, à une poussée de bas en haut, poussée qui lui est transmise par l'intermédiaire du mercure, et lui fait surmonter la pression capillaire exercée sur elle de haut en bas par la calotte soulevée; la pellicule mercurielle, que la cohésion empêche de se briser, est obligée alors de continuer à se développer et d'entourer enfin complétement la bulle d'air.

Un fait remarquable observé encore par le même

(1) *Comptes rendus*, t. XX, p. 1658.

physicien[1], c'est que ces bulles creuses de mercure sont transparentes dans leur partie la plus mince ; la lumière qui les traverse prend une teinte d'un bleu ardoisé. A l'époque où M. Melsens a fait connaître ce dernier résultat, Faraday n'avait pas encore publié les expériences au moyen desquelles il a formé des lames si minces d'un grand nombre de métaux, que toutes laissent passer la lumière, et l'or était le seul qu'on eût pu atténuer assez pour le rendre transparent.

J'ai analysé au § 153 un travail de M. Hagen publié en 1849, où ce savant attribue la limitation des disques liquides de Savart à la tension des deux faces de la lame, cette tension donnant lieu à une force dirigée en sens contraire du mouvement du liquide.

§ 332. En 1852, M. Eisenlohr[2] a développé de grands et beaux anneaux colorés, en faisant tourner rapidement, dans leurs plans et autour de leurs centres, des lames circulaires d'eau de savon. Il engendre ces lames, par une agitation convenable, dans un ballon de verre dont le diamètre peut atteindre 12 centimètres, après avoir, suivant le procédé du Dr Reade, chassé par l'ébullition la totalité ou la presque totalité de l'air intérieur, et avoir bouché hermétiquement le ballon; il imprime ensuite à celui-ci un mouvement rapide de rotation autour d'un axe vertical passant par le centre.

Dans cette expérience, on voit bientôt se former, au centre commun des anneaux, une tache circulaire noire, qui grandit, et qui est nettement limitée à son bord par l'une des couleurs du premier ordre. L'auteur essaie

(1) *Journ. l'Institut*, 1845, n° 605, p. 279.

(2) *Bericht über die XXIX*ste *Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte*, p. 87. — Voir aussi le Traité de physique du même auteur ; l'édition que j'ai consultée est celle de 1860.

d'expliquer ce saut brusque, déjà signalé par Leidenfrost (§ 321), en émettant l'hypothèse que la portion noire n'a que l'épaisseur d'une simple molécule, de sorte que, dans le passage à l'anneau contigu, l'accroissement d'épaisseur est beaucoup plus considérable relativement à l'épaisseur de cette portion noire, que dans les passages entre les divers anneaux.

A la fin du § 230, j'ai dit un mot des modifications que M. Tyndall a fait subir, en 1854, aux lames de Savart résultant du choc d'une veine liquide contre un obstacle solide.

§ 333. Magnus, dans la première partie de ses *Recherches hydrauliques* (§ 234), publiée en 1855, s'occupe aussi des disques liquides de Savart. Il envisage la chose à peu près dans le même sens que M. Hagen, mais, n'employant pas le calcul, il considère la lame comme allant toujours en diminuant d'épaisseur de la partie centrale jusqu'au bord ; il introduit, comme M. Hagen, un obstacle dans le disque liquide pour y produire une échancrure, et il signale, à cet égard, des faits qu'il est important de noter : les gouttes formées aux deux bords de l'échancrure s'élancent beaucoup plus loin que celles qui émanent de la partie restante du contour du disque ; en outre, les premières partent dans les directions tangentielles aux courbes des bords d'où elles sont chassées.

J'ai parlé, au § 234, des recherches du même savant sur les phénomènes résultant du choc des parties continues de deux veines qui se rencontrent en formant un angle entre elles, phénomènes où se produisent également des lames.

J'ai reproduit, au § 118, la détermination donnée par M. De Tessan (année 1856) de la valeur de la pression qu'éprouverait l'air emprisonné dans une vésicule de vapeur d'eau, si ces vésicules existaient. C'est, je pense, la première évaluation théorique de la pression à l'intérieur d'une sphère laminaire d'un diamètre donné et formée d'un liquide donné, bien que cette évaluation soit de moitié trop faible, ainsi que je l'ai fait remarquer; on ne doit pas tenir compte de celles du Dr Hough, qui sont absolument fausses.

§ 334. J'ai traduit, dans le § 242, une partie de la Note de M. Gladstone sur la mousse (année 1857), Note où l'auteur avance que tous les liquides sont susceptibles de donner, par l'agitation, des calottes laminaires à leur surface, mais que la faculté de mousser paraît être sui generis et ne dépendre d'aucune propriété connue. M. Gladstone fait remarquer, en outre, que la mousse produite sur un liquide coloré est toujours d'une teinte plus claire que le liquide lui-même, et il ajoute que, dans certains cas, cette teinte est toute différente de celle du liquide; par exemple, la mousse d'une solution de rouge de cochenille est d'un pourpre bleuâtre pâle; il explique ces effets par l'absorption inégale des différents rayons qui composent la lumière blanche, dans une lame mince et dans une couche épaisse du liquide.

§ 335. M. Tyndall (1) (même année 1857), en plongeant la main dans l'écume de la mer par un temps âpre et humide, a trouvé que cette écume avait la température du sang, tandis que l'eau de la mer d'où elle provenait était très-froide. Il attribue la chaleur dont il s'agit à ce que les masses d'air, avant de former l'écume, avaient été fortement comprimées entre des vagues tombant les unes sur les autres.

(1) *Remarks on foam and hail* (PHILOS. MAGAZ., 4me série, vol. XIII, p. 352).

§ 336. En 1857 aussi, M. Van der Willigen[1] a proposé, pour rendre raison du saut brusque entre le noir et le blanc contigu dans une lame d'eau de savon, une explication qui coïncide, à peu de chose près, avec une hypothèse de Leidenfrost; il regarde comme probable que, dans la lame, s'opère une séparation de la partie huileuse du savon; que celle-ci glisse sur la couche de nature aqueuse et produit les bandes colorées, tandis que la portion mise à nu de cette couche aqueuse constitue le segment noir.

§ 337. J'ai rapporté, au § 156, la formule donnée, sans démonstration, en 1858, par Sir W. Thomson pour représenter, en fonction de la tension du liquide, la pression exercée par une bulle laminaire sur l'air intérieur. Sir W. Thomson déduit ensuite du calcul cette conséquence que, lorsqu'une lame liquide se développe, elle se refroidit, bien que d'une quantité extrêmement petite. Prenant comme exemple l'eau, il indique, pour la tension, sans dire où il a pris cette valeur et sans mentionner la température, 2,96 grains par pouce de longueur, ce qui, traduit en milligrammes par millimètre de longueur, fait 7,57. Supposant ensuite qu'une quantité d'eau du poids d'un grain soit étendue en une lame de 16 pouces carrés, il trouve que cette lame s'est refroidie d'environ $\frac{1}{320}$ de degré centigrade.

§ 338. En 1861, M. Graham, dans son célèbre Mémoire sur la dialyse[2], donne une explication des faits d'endosmose apparente que présentent les lames liquides

(1) *Ueber die Constitution der Seifenblasen* (Ann. de M. Poggendorff, vol. CII, p. 629).

(2) *Liquid Diffusion applied to Analysis* (Philos. transact. 1861, vol. CLI, 1re partie, p. 183).

(§§ 328 et 329); il s'exprime ainsi : « la séparation décrite est plus ou moins analogue à celle qu'on observe dans une bulle de savon gonflée avec un mélange gazeux composé d'acide carbonique et d'hydrogène. Aucun gaz, comme tel, ne peut traverser la lame aqueuse; mais l'acide carbonique étant soluble dans l'eau, est condensé et dissous par la lame aqueuse, et ainsi devient capable de passer au dehors et de se répandre dans l'atmosphère, tandis que l'hydrogène étant insoluble, ou à fort peu près, dans l'eau, est maintenu de l'autre côté de la lame, à l'intérieur de la bulle. »

§ 339. En 1861 aussi, M. Faye, après m'avoir fait l'honneur de répéter, devant l'Académie des sciences de Paris, mes expériences sur les systèmes laminaires des charpentes en fil de fer(1), a décrit une expérience consistant à agiter, à l'aide d'un anneau en fil de fer, de l'huile et de l'eau de savon dans un vase de verre; chaque fois que l'anneau passe de l'eau de savon dans l'huile, il emporte une lame du premier de ces liquides, laquelle, par les mouvements imprimés à l'anneau, donne lieu à une bulle laminaire complète pleine d'huile et nageant dans ce dernier liquide. En continuant à battre les liquides, ces sphères laminaires se multiplient et se subdivisent en sphérules de même nature de plus en plus petites et de plus en plus nombreuses, jusqu'à ce que le mélange devienne une émulsion. M. Faye pense qu'on peut faire l'application de ce phénomène à certaines questions de physiologie.

C'est en 1861 également que j'ai reçu la lettre où

(1) COMPTES RENDUS, t. LIII, p. 463. — Cet article est précédé d'une Note rédigée par moi sur les systèmes laminaires, Note au commencement de laquelle le nom de M. l'abbé Moigno se trouve, par une cause inutile à mentionner ici, substitué à celui de M. Faye.

M. Van Rees a bien voulu me communiquer les procédés au moyen desquels il change à volonté la position de la lamelle centrale dans le système laminaire de la charpente cubique, et détermine la formation des polyèdres laminaires intérieurs (§ 203).

Le principe nouveau concernant les systèmes laminaires des charpentes prismatiques (§ 202) m'a été exposé par le même savant dans une seconde lettre écrite en 1862..

§ 340. J'ai rapporté, dans le § 312, la remarque de M. l'abbé Florimond (année 1862) sur le diamètre maximum plus grand que prennent les bulles de savon quand on emploie, pour les gonfler, une pipe de verre au lieu d'une pipe de terre.

M. Florimond fait observer, en outre, que plus est large l'orifice de l'évasement du tube, plus grand aussi est le diamètre des bulles, pourvu que le tube lui-même ne soit pas trop étroit. Je suis convaincu qu'en attachant un entonnoir en verre de 10 à 15 centimètres d'ouverture à un tube de 2 centimètres de diamètre intérieur communiquant avec une soufflerie, et s'en servant pour gonfler des bulles avec un bon liquide glycérique, on donnerait à ces bulles des dimensions énormes. Je trouve, du reste, dans la suite du passage des *Petites chroniques de la science* cité au § 315, que M. Vivier, le célèbre musicien, obtient des bulles de savon gigantesques en soufflant dans un cornet en carton, cornet qui, sans doute, est fort évasé. On verra plus loin que M. Böttger a obtenu aussi de très-grosses bulles en employant un large orifice.

MM. Minary et Sire ont décrit, en 1862 aussi, leur expérience de petites bulles laminaires complètes, engendrées par la vive agitation de l'acide sulfurique avec l'huile d'olive, expérience que j'ai rappelée avec plus de détails dans le § 237.

§ 341. Dans la Note à laquelle j'ai fait allusion au § 314, Note publiée en 1862 encore, M. Mach, partant du fait que mes systèmes laminaires ne satisfont pas à la condition générale de l'équilibre, puisqu'ils ont, sur les arêtes liquides, des surfaces à forte courbure dans le sens transversal seulement, tandis que les surfaces des lames sont à courbure moyenne nulle, émet l'opinion que l'étude de ces systèmes pourrait conduire à des conséquences importantes sur les lois de l'attraction moléculaire dans les liquides. Selon lui, j'aurais cherché à expliquer le fait en question en admettant que l'épaisseur des lames est inférieure au double du rayon de la sphère d'attraction, ce qui fait supposer que je regarde ces mêmes systèmes comme étant à l'état d'équilibre complet; or ce que j'avais dit dans ma 2^{me} Série, c'est que, dans un système où des lames à courbure moyenne nulle sont ainsi rattachées à des masses à courbure concave, l'équilibre n'est qu'apparent, ou plutôt n'existe que dans la forme générale de l'ensemble; que, par suite des différences de pression capillaire, les lames envoient continuellement leur liquide à ces masses, et vont conséquemment en s'amincissant; enfin que le système *tend* vers un état d'équilibre dans lequel les lames auraient une épaisseur moindre que le double du rayon de l'attraction moléculaire, mais que cet équilibre paraît ne pouvoir être atteint, les lames éclatant toujours auparavant. Aujourd'hui, du reste, j'abandonne, en conséquence de la remarque de M. Quincke citée au § 165, l'idée de la possibilité théorique d'un équilibre final complet.

M. Mach croit qu'il pourra tirer un parti intéressant de la comparaison des épaisseurs des lames de différents liquides (probablement à l'instant de leur formation); c'est dans ce but qu'il a réalisé, ainsi que je l'ai dit au paragraphe cité plus haut, le système laminaire du tétraèdre régulier, en employant de la colophane fondue; il a formé aussi de petites lames avec une solution d'un silicate alcalin, lames qui se sont solidifiées par l'évaporation de l'eau. Ces différentes lames ayant été détachées des fils solides, M. Mach les a pesées, et a mesuré la surface de chacune d'elles, puis, connaissant en outre leurs densités, il a calculé leurs épaisseurs moyennes. Il a trouvé de cette manière que l'épaisseur moyenne des lames de la solution de silicate, à l'état liquide, était de $0^{mm},142$, et que celle des lames de colophane était de $0^{mm},027$.

§ 342. En 1862 également, M. Kaul a fait paraître un article(1) relatif aussi à mes systèmes laminaires. Il démontre la nécessité de l'égalité des angles entre les lames qui aboutissent à une même arête liquide et entre les arêtes liquides qui aboutissent à un même point liquide, en employant une méthode qui revient à celle que j'avais exposée dans ma 6me Série, et que je n'ai pas reproduite dans l'ouvrage actuel parce qu'on arrive beaucoup plus simplement au résultat par les tensions. Il fait remarquer ensuite que si la charpente qu'on retire du liquide consiste simplement en deux polygones plans ayant un côté commun, et si les plans de ces deux polygones forment entre eux un angle moindre que 120°, le système obtenu se compose de deux lames courbes s'appuyant respectivement sur les contours libres des deux polygones, et d'une troisième lame, en forme de faucille, partant du côté commun pour s'unir aux deux premières

(1) *Ueber die Plateau'schen Figuren* (SITZUNGSBERICHTE DER KOENIGSBERGER GESELLSCHAFT, t. III, p. 7).

par une arète liquide courbe ; il en conclut que de semblables lames en faucille tendent toujours à se produire dans les différentes charpentes, mais que leur forme est altérée par les autres lames du système, et il croit qu'en partant de ce principe et des lois concernant les angles, on peut prévoir quel sera le système qui se montrera dans une charpente donnée. Mon fils Félix (même année 1862) a déterminé la formation de grosses bulles laminaires en lançant obliquement en l'air de l'eau de savon, expérience que j'ai citée plus au long dans le § 235.

§ 343. Dans un mémoire[1] de l'année 1863, M. Sire indique quelques expériences curieuses concernant la pression exercée par une bulle creuse sur l'air emprisonné : il fait en sorte que deux bulles de liquide glycérique soient respectivement gonflées aux deux extrémités d'un même tube ; celui-ci est muni, à cet effet, d'un embranchement pour l'insufflation ; l'appareil est construit de façon qu'on puisse établir ou interrompre à volonté la communication entre les deux moitiés du tube. Quand cette communication est fermée ainsi que l'orifice d'insufflation, les bulles n'éprouvent aucun changement de dimensions ; mais quand elle est ouverte, l'orifice d'insufflation demeurant bouché, les bulles ne persistent dans le même état que si leurs diamètres sont égaux ; dans le cas contraire, on voit la plus petite diminuer avec une vitesse accélérée, jusqu'à s'annuler, l'excès de sa pression chassant son contenu gazeux dans la plus grosse, qui augmente ainsi en volume. L'auteur varie l'expérience en modifiant l'appareil de manière à pouvoir gonfler l'une des bulles à l'intérieur de l'autre.

Ainsi que je l'ai dit dans le § 235, M. Van der Mens-

(1) *Étude sur la forme globulaire des liquides*, thèse présentée à la Faculté des sciences de Besançon.

brugghe a étendu (année 1864) l'expérience de mon fils, en montrant que, par le même procédé convenablement employé, on peut forcer un grand nombre de liquides, peut-être tous, à s'arrondir en bulles creuses complètes.

§ 344. En 1864 encore, M. Laroque[1] s'est proposé d'étudier la constitution d'une veine d'eau lancée verticalement de haut en bas par un orifice circulaire, quand le liquide du vase est animé d'un mouvement gyratoire autour de l'axe de l'orifice. Le vase était cylindrique et de grande dimension ; l'orifice, percé au centre du fond, avait un centimètre de diamètre ; le mouvement de rotation était imprimé au liquide par un moyen que l'auteur indique. Parmi les observations de M. Laroque, je dois citer ici la suivante : Sous une charge suffisamment réduite, une excavation formée au milieu de la surface du liquide du vase, après avoir atteint l'orifice, pénétrait dans la veine, et celle-ci, jusqu'à une certaine distance, devenait laminaire ; elle se composait alors de renflements et d'étranglements creux occupant des positions fixes. Avec une charge de 15 centimètres, il y avait trois de ces renflements, dont les deux supérieurs, de forme régulière, avaient chacun 8 centimètres de longueur et 16 millimètres de largeur; le troisième était un peu plus petit et moins régulier ; au-dessous, la veine s'éparpillait en gouttes. Seulement, d'après les figures dont le Mémoire est accompagné, la lame qui constituait toute cette portion de la veine était beaucoup moins mince aux étranglements qu'aux renflements.

J'ai indiqué, aux §§ 204 et 210, les principaux résultats auxquels M. Lamarle est arrivé dans son Mémoire (années 1864 et 1865) sur mes systèmes laminaires.

(1) *Ann. de chim. et de phys.* de Paris, 4me série, t. I, p. 276.

Ainsi qu'on l'a vu, il démontre mathématiquement les lois que j'avais trouvées, et il étudie d'une manière toute spéciale les polyèdres laminaires fermés à faces courbes qu'on produit au milieu des systèmes laminaires des charpentes.

J'ai cité, au § 160bis, l'expérience de M. Marangoni (année 1865), consistant à faire traverser une lame d'eau de savon par des veines liquides.

§ 345. On a vu, à la fin du § 118, que M. Tait a calculé, en 1866, les pressions auxquelles l'air serait soumis à l'intérieur de vésicules de vapeur d'eau de diamètres déterminés.

La même année, M. Tait a communiqué à la Société Royale d'Edimbourg(1), certains résultats concernant les lames. La relation qu'en donnent les *Proceedings* est trop succincte, mais une lettre que l'auteur m'a fait l'honneur de m'adresser me permet de les résumer d'une manière un peu plus complète.

En premier lieu, M. Tait cherche par quelles modifications passe l'étranglement quand une bulle se détache d'un orifice (§ 228). Pour cela, il gonfle, au moyen d'un tube évasé tenu l'orifice en haut, une bulle de liquide glycérique, avec un mélange de gaz d'éclairage et d'air; il s'arrange de façon que la bulle ait une légère tendance à monter, et qu'elle se sépare de l'orifice avec le moins de vitesse possible; il constate alors, pour autant que la rapidité du phénomène le permet, un résultat prévu par lui, savoir qu'à l'instant de la fermeture, la ligne méridienne de l'étranglement présente deux points de rebroussement en regard qui s'unissent. Ni le compte-rendu ni la lettre ne mentionnent d'après quelles vues théoriques

(1) *Proceedings of the Roy. Soc. of Edinb.*, vol. V, 1865-66, p. 593.

M. Tait attendait ce résultat. Je reviendrai plus loin sur le phénomène.

En second lieu, M. Tait a montré comment on peut réunir deux bulles en une seule, ou fractionner une bulle en deux ou plusieurs autres; j'ignore quels sont les procédés qu'il a indiqués, mais je me suis assuré que si, après avoir déposé sur un anneau une bulle de savon de 5 à 6 centimètres de diamètre, on descend sur elle une seconde bulle de même diamètre gonflée à l'orifice d'une pipe, les deux s'unissent fréquemment sans cloison et qu'en même temps la bulle unique résultante se sépare spontanément de la pipe, pour demeurer sur l'anneau.

Avec le liquide glycérique, deux bulles du diamètre ci-dessus ont toujours donné une cloison ; il a fallu porter le diamètre a un décimètre environ. Quant à la séparation d'une bulle en deux autres, elle se réalise dans l'expérience du § 113.

En troisième lieu, M. Tait dirige, dans une chambre obscure, un faisceau de rayons solaires sur une grosse bulle de liquide glycérique. Ce faisceau, après s'être partiellement réfléchi à la partie postérieure de la bulle comme sur un miroir concave, converge conséquemment en un foyer d'où il diverge de nouveau pour traverser ensuite la partie antérieure de la bulle; une portion de la lumière ainsi réfléchie est reçue sur un écran blanc convenablement placé et va y peindre les couleurs des lames liquides minces avec leurs modifications successives; M. Tait assure que ce spectacle est fort beau.

Enfin l'auteur avance que si l'on regarde à travers un prisme la petite image du soleil réfléchie, dans une chambre obscure, par une bulle de liquide glycérique, on distingue parfaitement, dans le spectre produit, les bandes obscures d'interférence connues sous le nom de bandes de Wrede.

§ 346. M. Broughton[1] (même année 1866) rappelle le fait, suivant lui bien connu, que, dans une bulle de savon, les portions qui, vues d'une certaine distance, paraissent d'une teinte uniforme, montrent, quand on les examine de plus près, une foule de petites bandes de couleurs variées et brillantes; il est rare qu'on y trouve un espace d'un millimètre carré qui ne contienne pas plusieurs de ces petites bandes, et l'uniformité apparente est due simplement à la prédominance des petites bandes d'une teinte déterminée. M. Broughton dépose sur un anneau une petite bulle de liquide glycérique à l'oléate de soude, et, lorsqu'une tache noire s'est formée au sommet[2], il observe celle-ci et ses environs à l'aide d'un microscope composé, la bulle étant éclairée par une lumière vive et convenablement dirigée; il constate alors la production d'un grand nombre de petites figures colorées très-variées et très-mobiles, offrant, dit-il, un spectacle de la plus grande magnificence.

M. Broughton essaie ensuite de déterminer, par une méthode particulière, l'épaisseur moyenne de la lame qui constitue une bulle: il gonfle la bulle avec un mélange d'hydrogène et d'air, en variant les proportions de ce mélange et le diamètre de la bulle jusqu'à ce que

(1) *On some properties of soap-bubbles* (PHILOS. MAGAZ., 4me série, vol. XXXI, p. 228).

(2) L'apparition de cette tache noire sur une bulle de liquide glycérique me paraît singulière : on a fait chez moi une quantité innombrable de bulles de ce liquide préparé soit au savon, soit à l'oléate de soude, et jamais on ne m'a signalé de semblables taches, quelque grande qu'ait été la persistance. Les bulles de M. Broughton devaient être fort petites, et c'est peut-être à cette circonstance qu'était due la production de la tache noire.

celle-ci, débarrassée de la goutte qui y adhère ordinairement, flotte dans l'atmosphère sans grande tendance à monter ou à descendre; connaissant alors le diamètre de cette bulle, la densité du liquide, et la proportion du mélange gazeux intérieur, il en déduit, au moyen d'une formule, le poids de la bulle et l'épaisseur moyenne cherchée. Par exemple, une bulle de 90^{mm} de diamètre, gonflée avec un mélange de 1 vol. d'hydrogène et de 16 vol. d'air, s'est trouvée dans les conditions requises, et M. Broughton est arrivé, pour l'épaisseur moyenne de la lame, à la valeur $0^{mm},000965$.

§ 347. Dans le 5^{me}, le 6^{me} et le 7^{me} de ses Mémoires *Sur la théorie mécanique de la chaleur* (de 1865 à 1868), Dupré, nous le savons, a traité, par des méthodes nouvelles, certaines questions relatives aux lames liquides. Ainsi qu'on l'a vu au § 161, outre des expériences simples au moyen desquelles il constate l'existence de la tension dans les lames, il arrive à plusieurs résultats généraux concernant cette force : il fait remarquer que la tension est indépendante de l'épaisseur de la lame, du moins tant que cette épaisseur n'est pas au-dessous d'une certaine limite extrêmement petite; il établit que la tension diminue, mais assez faiblement, quand la température augmente, et il signale un fait qui montre cette variation dans les lames; il cherche les lois que suit la vitesse de retrait d'une lame qui éclate, et celle qui régit la diminution progressive du diamètre d'une bulle quand on laisse ouvert le tube d'insufflation; enfin l'un des nombreux procédés qu'il décrit pour évaluer la tension des surfaces liquides en général, est fondé sur la mesure de la pression à laquelle est soumis l'air emprisonné dans une bulle.

J'ajoute ici une expérience curieuse exposée dans le même travail : si on laisse tomber d'une hauteur modérée une petite boule de liége sur une lame plane horizontale de liquide glycérique, la lame est traversée, mais n'éclate pas et conserve son intégrité. Pour savoir ce qui se passe dans cette circonstance, Dupré fixe la boule de liége à l'extrémité d'une aiguille, et, tenant cette dernière en main, il fait passer la boule avec lenteur à travers la lame ; il voit alors cette dernière s'enfoncer, former une poche de plus en plus profonde, puis cette poche s'étrangle au-dessus de la boule, l'étranglement se ferme, se sépare en deux, et la lame plane est restituée. Le phénomène est donc tout à fait analogue à celui qui a lieu quand on sépare une bulle du tube qui a servi à la gonfler (§§ 224 et 228).

M. Van der Mensbrugghe a fait (§ 139), en 1866, l'application du principe général du § 128 à la réalisation, en lame, d'une surface à courbure moyenne nulle dont M. Scherk avait trouvé l'équation en coordonnées finies.

J'ai donné, dans le § 162, la substance d'une autre Note de M. Van der Mensbrugghe, (année 1866), concernant : 1° de nouveaux procédés pour l'évaluation de la tension des lames; 2° les lois qui régissent la forme que prend un fil flexible inséré dans une lame liquide courbe, quand on a crevé la portion de lame qu'il intercepte. J'ai fait allusion, dans le même paragraphe, au rapport de M. Lamarle sur cette Note, rapport où est signalée une loi qui avait échappé à M. Van der Mensbrugghe, ainsi que la nécessité d'une déformation, dans le plus grand nombre des cas, de la surface laminaire sous l'action du fil qui s'est tendu. Enfin, au même endroit encore, j'ai cité une dernière Note, publiée en 1867, dans laquelle M. Van der Mensbrugghe vérifie les conclusions du rapport ci-dessus, et indique une expérience intéressante sur la tension d'une lame plane verticale.

§ 348. En 1866 ou 1867, M. Böttger(1) a développé, avec une décoction concentrée d'écorce de Quillaya (bois de Panama), des bulles extrêmement grosses, persistant longtemps et étalant de vives couleurs (il n'indique ni le diamètre ni la durée), en se servant d'un entonnoir de 7 à 8 centimètres d'ouverture. On sait que l'écorce de Quillaya contient de la saponine.

§ 349. Les lames liquides ont fait, en 1867, l'objet de trois Mémoires de Brewster. Le premier (2) est consacré aux couleurs des lames : l'auteur étudie avec un soin minutieux toutes les dispositions, tous les changements des couleurs dont il s'agit, et tous les phénomènes singuliers qu'elles présentent, tels que la production et les mouvements des petites taches en forme de têtards, etc. A part ces détails, qui ne sauraient être résumés, voici les résultats les plus saillants :

1° On produit une lame plane dans l'orifice d'un verre à boire ; on tient le verre de manière que cette lame soit verticale, puis, lorsque les bandes colorées s'y sont bien développées, on donne au verre un mouvement de rotation aussi rapide que possible autour de son axe ; toutes les bandes demeurent horizontales.

2° La lame étant placée horizontalement et offrant différentes teintes, on souffle sur sa surface à travers un tube étroit, dans la direction d'un diamètre ; on voit aussitôt se former, de chaque côté de ce diamètre, un système d'anneaux colorés ; ces deux systèmes tournent

(1) *Jahres-Bericht des physikalischen Vereins in Frankfurt am Main*, 1866-1867, p. 67.

(2) *On the colours of the soap-bubble* (TRANSACT. OF THE ROYAL SOCIETY OF EDINBURGH, vol. XXIV).

rapidement, et en sens contraires, autour de leurs centres respectifs. Si le souffle est dirigé non suivant un diamètre, mais suivant une petite corde, il n'y a plus qu'un système d'anneaux colorés tournant. Dans tous, les teintes des premiers ordres sont vers le centre. Enfin si l'on continue à souffler, les anneaux disparaissent graduellement.

3° Brewster énonce une idée analogue à celles de Leidenfrost et de M. Van der Willigen (§§ 321 et 336) : selon lui, les couleurs d'une lame d'eau de savon ne résulteraient pas des différentes épaisseurs de la lame elle-même, mais d'une matière particulière qui flotte sur cette lame. Ce qui lui paraît le plus vraisemblable, c'est que la matière qui produit ainsi les couleurs est formée de l'un des ingrédients de la solution, séparé de celle-ci par une sorte de sécrétion, laquelle n'a lieu que lorsque le liquide est à l'état laminaire. Il s'appuie principalement sur les faits suivants : Si l'on examine la surface d'une solution de savon ou celle du liquide glycérique, même quand le vase est peu profond, on n'y observe aucune coloration, et elle réfléchit les images des objets comme le ferait l'eau ou le verre ; mais dès que le liquide est étendu en lame mince, sa surface devient momentanément inégale et ne réfléchit plus les images qu'imparfaitement ; de plus, quand les couleurs se sont développées, toutes leurs variations et tous les mouvements qui s'y produisent s'accordent avec l'hypothèse en question ; enfin, si l'on souffle sur la lame ou qu'on y passe une plume mouillée du même liquide, on balaie la matière colorante, et l'on éparpille les couleurs.

Les observations renfermées dans le second Mémoire(1),

(1) *On the figures of equilibrium in liquid films* (TRANSACT. OF THE ROYAL SOCIETY OF EDINBURGH, vol. XXIV).

observations qui ont trait surtout aux systèmes laminaires des charpentes, ont été entreprises par Brewster dans un but de simple amusement, et offrent assez peu de résultats nouveaux au point de vue scientifique; quelques uns cependant ne manquent pas d'intérêt: tel est celui que j'ai rapporté au § 187, et qui consiste à employer, comme charpente solide, l'ensemble de deux rectangles égaux qui se coupent par les milieux de deux côtés opposés et qui sont mobiles autour de leurs points d'intersection; on a vu comment, au moyen de cette charpente, on complète la vérification de l'instabilité d'un système laminaire d'équilibre dans lequel plus de trois lames aboutissent à une même arête liquide. C'est dans le même Mémoire que se trouve décrit le procédé dont j'ai parlé au § 206 pour la réalisation de plusieurs systèmes laminaires avec une quantité minime de liquide.

Enfin voici un troisième résultat du même Mémoire encore: Brewster a imaginé de réaliser une lame à l'un des orifices d'un tube en forme de cône tronqué: quand, après avoir plongé l'orifice le plus large dans le liquide glycérique, on l'en retire, il se trouve nécessairement occupé par une lame; mais celle-ci se met aussitôt en mouvement dans l'intérieur du tube vers le plus petit orifice, et ne s'arrête que lorsqu'elle a atteint ce dernier. Je ferai observer qu'on peut considérer ce phénomène comme un effet de la tension: la lame faisant constamment effort pour diminuer d'étendue, elle satisfait à cette tendance en marchant vers le petit orifice.

Enfin le troisième Mémoire[1] concerne les apparences que manifestent de petites lames d'alcool, d'huiles vola-

(1) *On the motion and colours upon films of alcohol, volatile oils, and other fluids* (TRANSACT. OF THE ROYAL SOCIETY OF EDINBURGH, vol. XXIV).

tiles ou fixes, etc. Brewster produit ces lames en déposant une goutte du liquide à observer soit sur une ouverture de 5^{mm} de diamètre au plus, pratiquée dans une plaque solide, soit sur un petit anneau ; la goutte se façonne d'abord en lentille bi-concave, et, quand on place la plaque ou l'anneau verticalement, la majeure partie du liquide descend, et laisse une lame. Avec un liquide suffisamment volatil, comme l'alcool, on attend quelque temps avant de redresser la plaque ou l'anneau ; l'évaporation seule transforme alors la lentille bi-concave en une lame plane occupant presque toute l'ouverture. Brewster observe les lames dont il s'agit soit par transmission, soit par réflexion ; dans le premier cas, il y voit peu de couleurs, mais il y distingue des courants affectant des formes et des mouvements bizarres ; dans le second, il y constate, outre les mêmes courants, des systèmes variés et mobiles d'anneaux colorés.

§ 350. Nous trouvons encore en 1867 une expérience remarquable au moyen de laquelle M. Chautard (1) parvient à rendre manifeste à tout un auditoire le magnétisme de l'oxygène : à l'orifice d'une pipe de terre maintenue immobile par un support, il gonfle, avec de l'oxygène, une bulle de liquide glycérique ; cette bulle se trouve placée au-dessus et près des pôles d'un électro-aimant ; par des aimantations et des désaimantations successives de ce dernier, elle prend un mouvement oscillatoire, très-visible surtout quand elle est fortement éclairée.

§ 351. Dans une curieuse Note (2) de 1868, M. Tait arrive, en partant des propriétés des bulles, à un

(1) *Expériences relatives au magnétisme et au diamagnétisme des gaz* (COMPTES RENDUS, t. LXIV, p. 1141).

(2) *Note on an Inequality* (PROCEEDINGS OF THE ROY. SOC. OF EDINBURGH, vol. VI, 1867-68, p. 292).

théorème de mathématiques pures, théorème qui peut s'énoncer ainsi :

Le cube de la somme des carrés de plusieurs nombres est toujours plus grand que le carré de la somme des cubes de ces mêmes nombres.

En effet, si l'on conçoit plusieurs bulles ayant respectivement pour rayons r, r', r'', etc., et si l'on imagine que toutes ces bulles s'unissent en une seule, dont nous désignerons le rayon par R, la surface de cette dernière sera nécessairement, en vertu de la tension, moindre que la somme des surfaces des premières, ce qui donnera l'inégalité :

$$r^2 + r'^2 + r''^2 + \cdot \cdots\cdots\cdots > R^2 ;$$

mais comme chacune des bulles originaires avait une courbure plus forte que la bulle unique résultante, et exerçait conséquemment sur l'air intérieur une pression plus intense, le volume de la bulle unique doit l'emporter sur la somme des volumes des autres, d'où cette seconde inégalité :

$$r^3 + r'^3 + r''^3 + \cdots\cdots\cdots\cdots < R^3 ;$$

or, de ces deux inégalités, on déduit aisément la suivante :

$$(r^2 + r'^2 + r''^2 + \cdots\cdot)^3 > (r^3 + r'^3 + r''^3 + \cdots\cdots)^2.$$

§ 352. En 1868 encore, M. Cauderay [1] a signalé les bulles de savon comme étant extrêmement sensibles aux attractions et répulsions électriques, et a indiqué une suite d'expériences curieuses très-propres à être effectuées dans les cours publics.

Par exemple : « ..... si l'on charge la machine au moment où on souffle des bulles de savon dans le voisi-

(1) *Effets de l'électricité statique sur les bulles de savon* (Bullet. de la Soc. Vaudoise des Sc. naturelles, vol. IX, p. 655).

nage, elles seront attirées à une distance de 30, 40 ou 50 centimètres, et même bien au delà si la machine est assez puissante. On voit alors les bulles se précipiter vivement sur le conducteur électrique et s'y briser; quelquefois les bulles résistent au choc, elles s'attachent au conducteur, et s'y chargent; elles sont alors aussitôt repoussées au loin et attirées soit par l'expérimentateur, soit par le sol, sur lequel elles ne tombent, le plus souvent, qu'après avoir fait une série de bonds, pendant lesquels l'électricité de la bulle se combine avec celle de la terre.... »

Si l'on dépose sur le conducteur une série de bulles, « au moment où l'on mettra en mouvement le plateau de verre de la machine, elles s'allongeront d'abord en forme d'ellipse, puis se détacheront du conducteur pour voler dans toutes les directions, avec une tendance toutefois à se diriger sur les personnes placées autour de la machine. »

Citons encore le passage suivant, où il s'agit de montrer que l'électricité statique ne se manifeste qu'à la surface extérieure des corps : « ..... si, sur un disque isolé (en métal), on souffle des bulles concentriques, lorsqu'on charge la machine, la bulle extérieure seule est influencée, elle se déforme plus ou moins suivant l'intensité de la charge, tandis que les bulles intérieures conservent toutes leur forme demi-sphérique. »

M. Cauderay recommande d'armer la machine d'un conducteur supplémentaire, afin que les expériences puissent se faire à une assez grande distance des supports isolants; sans cela, ces supports sont bientôt humectés par les gouttelettes que les bulles projettent en éclatant.

§ 353. M. L. Dufour (année 1869) a eu l'heureuse idée de substituer une lame d'eau aux toiles métalliques pour l'observation de la constitution des flammes[1]: l'eau est lancée par une fente, sous une pression convenable, de manière à former une lame horizontale; à l'aide de cette lame, M. Dufour coupe nettement une flamme en un point quelconque de sa hauteur. « Les gaz chauds et les particules charbonneuses sont entraînés par l'eau. En plaçant l'œil au-dessus, on voit fort bien le cône creux de la flamme, la paroi lumineuse, etc.... rien n'empêche de prolonger l'observation aussi longtemps que l'on veut, de voir de très-près, et même d'employer une loupe. »

§ 354. En 1869 également, M. Boussinesq[2] a soumis au calcul les formes de la ligne méridienne des lames de Savart produites par le choc d'une veine liquide contre un petit disque solide (§ 230).

J'ai mentionné, au § 165, l'opinion énoncée par M. Quincke, dans la même année, sur l'impossibilité de l'existence d'une lame liquide dont l'épaisseur est moindre que le double du rayon de l'attraction moléculaire; au § 166, les expériences intéressantes de de M. Lüdtge (même année), consistant dans la substitution spontanée d'une lame d'un liquide à une lame d'un autre liquide; enfin, aux §§ 167 et 168, les phénomènes qui se produisent, d'après l'observation de M. Van der Mensbrugghe (toujours même année), quand on dépose à la surface de l'eau pure une bulle de savon ou une bulle de saponine, ainsi que des effets curieux de substitutions de lames.

§ 354^bis^. En 1869 encore, M. Kessler a indiqué[3] une manière simple d'effectuer l'expérience de la bulle de

(1) *Bullet. de la Soc. Vaudoise des Sc. naturelles*, vol. X, p. 181.

(2) *Comptes rendus*, t. LXIX, pp. 45 et 128.

(3) *Vorlesungsversuche* (BULLET. DE LA SOCIÉTÉ CHIMIQUE DE BERLIN, 2me année, p. 369).

savon flottant sur le gaz acide carbonique (§ 329) : le gaz est produit dans un petit flacon à dégagement, et il est amené dans le bec d'un large entonnoir; il s'accumule ainsi dans la partie évasée, et c'est là qu'on dépose la bulle[1].

§ 355. Je n'ai parlé qu'incidemment, dans cet historique, des lames minces résultant de l'extension d'une gouttelette liquide sur un autre liquide ; une semblable lame, en effet, est d'un tout autre genre que celles dont je me suis occupé : elle est en contact par sa face supérieure avec l'air, et, par sa face inférieure, avec le second liquide; elle n'est pas libre de prendre diverses formes, et constitue simplement une couche ténue reposant sur la surface plane et horizontale du liquide sous-jacent. On pourra consulter, à l'égard de ces lames, le Mémoire de M. Van der Mensbrugghe résumé au § 167; on y trouvera l'indication des différents physiciens qui ont porté leur attention sur le sujet dont il s'agit, et une courte analyse de leurs recherches[2].

§ 356. Ainsi qu'on l'a vu, Leidenfrost admet (§ 321) que, dans une bulle de savon, l'huile du savon se sépare et se rend à la surface extérieure de la lame, où elle donne lieu aux couleurs, et il est conduit à cette opinion par les apparences successives que présente la bulle; M. Van der Willigen admet également (§ 336) une séparation de la partie graisseuse du savon, pour expliquer le saut brusque qu'on observe, dans une lame suffisamment mince, entre la zone noire et la zone blanche contiguë;

(1) Pour les recherches postérieures à 1869, voir les articles inscrits au § 508 sous les nos 14, 15, 19, 26, 30, 32, 37, 38 et 42.

(2) M. Van der Mensbrugghe a donné à ce Mémoire une suite, dans laquelle il complète son historique; c'est le travail inscrit au § 508 sous le no 45.

enfin Brewster, s'appuyant, comme Leidenfrost, sur l'aspect des phénomènes de coloration, avance, de même, que les couleurs sont le résultat d'une matière sécrétée par les lames et qui vient s'étendre à leur surface (§ 349). L'idée qu'une substance, soit le savon, soit l'un de ses ingrédients, se sépare de la solution et vient s'étendre sur les faces de la lame, a donc été émise à trois reprises différentes par de bons observateurs; or, ainsi que je l'ai rappelé dans la deuxième note du § 299, Dupré a cherché à montrer théoriquement la possibilité d'un fait de ce genre, et cite, à l'appui de son assertion, une expérience qui semble concluante.

A tout cela j'ajouterai ici les remarques suivantes : en premier lieu, dans mes expériences relatives aux petites calottes laminaires (§§ 246 à 249), il ne s'est jamais formé de tache noire nettement limitée que sur les lames des solutions des différents savons; quand, avec d'autres liquides, avec l'huile d'olive, par exemple, le sommet de la calotte prenait une teinte finale voisine du noir, cette teinte se fondait insensiblement dans celle de la zone environnante; en second lieu, les lames noires, dans les cas où l'évaporation est nulle, persistant fort longtemps (§ 229), et, d'après quelques essais que j'ai faits, les lames des solutions alcalines étant très-peu durables, il est difficile d'admettre, avec M. Van der Willigen, que la zone noire soit formée de la partie alcaline du savon; je regarde comme plus probable que c'est le savon lui-même qui, tendant, conformément au fait avancé par Dupré, à être expulsé de la solution, est repoussé de la partie colorée de la lame, et vient ainsi, en solution beaucoup plus concentrée, former la zone noire. Cette opinion se trouve appuyée par l'expérience de Newton (§ 319), d'après laquelle on n'observe le bleu sombre qui devrait toujours précéder le noir, que lorsque la solution contient une très-forte proportion de savon; alors, en effet, dans l'hypothèse que je propose, il y a nécessairement moins de différence de composition entre la zone noire et le reste de la lame, et conséquemment le saut doit être moins brusque; enfin, dans l'expérience de Pfaff (§ 325), après que, par l'action du froid, la majeure partie de l'eau s'est séparée sous la forme de petits cristaux, la lame est noire, et peut se maintenir plusieurs jours; or le liquide de cette lame consiste évidemment alors en une solution très-concentrée de savon.

CHAPITRE IX.

Stabilité des figures d'équilibre; étude purement expérimentale.

§ 357. Revenons aux figures d'équilibre. Ainsi qu'on l'a vu (§ 34), il est très-probable que la sphère est la seule figure d'équilibre fermée, et qu'ainsi toutes les autres présentent des dimensions infinies dans certains sens. Or, comme on l'a vu aussi par plusieurs exemples, quand on essaie de réaliser partiellement l'une de ces dernières, soit avec une masse d'huile dans le mélange alcoolique, soit avec une lame mince de liquide glycérique dans l'air, on reconnaît en général que, lorsque les terminaisons solides auxquelles adhère la masse ou la lame doivent comprendre entre elles une portion trop étendue de la figure, celle-ci refuse de se former, d'où il faut conclure qu'avec cet écartement des terminaisons, elle serait instable. Nous allons maintenant chercher les limites de stabilité de la plupart des figures dont nous nous sommes occupé, et spécialement des figures de révolution comprises entre deux bases égales perpendiculaires à l'axe.

Lorsqu'une sphère d'huile est librement suspendue dans le mélange alcoolique, elle manifeste toujours, comme je l'ai déjà dit (§ 34), une parfaite stabilité de forme : si, par des mouvements imprimés au liquide ambiant, on altére cette forme, la masse la reprend toujours exactement. Une bulle de savon isolée dans l'air montre également une forme permanente et stable : si on la heurte de bas en haut avec une étoffe de laine tendue, et que le choc soit assez léger pour ne pas la faire crever, on la voit s'aplatir plus ou moins contre l'étoffe, puis rebondir à la manière d'une balle élastique, en reprenant sa sphéricité. Ainsi la sphère est une figure d'équilibre stable dans son état complet, et conséquemment, à plus forte raison, toute portion de sphère est stable.

La sphère n'a donc pas de limite de stabilité, dans le sens que j'ai donné à cette expression : c'est-à-dire que, quelle que soit l'étendue d'une portion réalisée de sphère relativement à la sphère entière, cette portion est toujours à l'état d'équilibre stable ; c'est ce qu'on voit se vérifier, par exemple, à l'égard d'une masse adhérente à un disque solide (§§ 14 et 15), à l'égard des bases d'un cylindre réalisé entre deux anneaux (§ 40), etc.

Je citerai encore les petites surfaces qui terminent respectivement la colonne de mercure et la colonne d'alcool dans le thermomètre à maximum et à minimum de Rutherford. Ces surfaces étant très-petites, l'action de la pesanteur sur leur forme peut être regardée comme négligeable ; aussi celle du mercure constitue-t-elle sensiblement une calotte sphérique convexe, et celle de l'alcool une demi-sphère concave. Or, ainsi que l'a fait remarquer M. Duprez (1), c'est la stabilité de cette dernière qui est la véritable cause du recul de l'index d'émail quand la température s'abaisse, et j'ajouterai que c'est également à la stabilité de la surface terminale du mercure qu'il faut attribuer l'action de celle-ci pour faire avancer l'index d'acier quand la température s'élève.

§ 358. Le fait de l'absence de limites de stabilité étant indépendant du rayon et, par suite, de la courbure de la sphère, il est également vrai quand le rayon devient infini, ou, en d'autres termes, quand la surface de la sphère devient un plan. Le plan n'a donc pas non plus de limite de stabilité, ce qui signifie qu'il peut être réalisé dans un contour solide d'une étendue qnelconque, sans cesser d'être stable.

§ 359. Les expériences des §§ 45 et 46 nous ont montré que lorsque, dans un cylindre liquide, la longueur surpasse notablement le triple du diamètre, l'équilibre est instable, et que la figure se sépare spontanément en deux portions inégales. Examinons actuellement la chose avec plus de détail.

Employons le système solide de la *fig.* 19, système composé de deux disques verticaux en regard; dans celui qui a servi à mes expériences, le diamètre des disques était de 30^{mm}, et la distance entre eux était de 108^{mm}, de sorte que le rapport entre la longueur et le

(1) *Note sur la cause qui s'oppose à l'introduction d'un liquide dans un vase à orifice étroit* (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 2me série, t. XV, p. 11, 1863).

diamètre du cylindre liquide qui s'étendrait d'un disque à l'autre, serait égal à 3,6. Ce système étant introduit dans le mélange alcoolique, on a fait adhérer à l'ensemble des deux disques, par le procédé indiqué au § 46, une masse d'huile trop grande pour constituer le cylindre dont il s'agit, puis on a absorbé l'excès à l'aide de la petite seringue. Comme dans les expériences du § 45, la figure commençait à s'altérer spontanément avant que la forme cylindrique fût atteinte; mais on a pu, à l'aide d'un petit artifice, pousser l'expérience plus loin, et parvenir à former un cylindre exact(1). Celui-ci a paru persister pendant un instant; puis il a commencé à s'étrangler sur une partie de sa longueur pour se renfler sur l'autre, comme les figures verticales, et le phénomène de la désunion s'est achevé de la même manière, en donnant lieu à deux masses finales de volumes différents.

On a répété plusieurs fois l'expérience, et toujours avec les mêmes résultats; seulement la séparation s'est effectuée tantôt d'un côté, tantôt de l'autre du milieu de la longueur de la figure. Du reste, si le phénomène s'opère d'une manière non symétrique par rapport au milieu de la longueur de la figure soit horizontale, soit verticale, la symétrie subsiste, au contraire, toujours par rapport à l'axe; en d'autres termes, pendant toute la

(1) Voici, pour cela, comment il faut procéder dans l'extraction de l'excès d'huile. On fait d'abord marcher l'opération avec une rapidité convenable, jusqu'à ce que la figure commence à se déformer; alors on promène légèrement l'extrémité du bec de la seringue le long de la partie supérieure de la masse, en allant de la portion la plus épaisse vers l'autre : cette faible action suffit pour ramener vers cette dernière une petite quantité d'huile, et rétablir ainsi la symétrie de la figure; puis on exécute une nouvelle absorption, l'on régularise encore la figure, et l'on continue ainsi jusqu'à ce qu'on atteigne exactement la forme cylindrique.

durée du phénomène, la figure ne cesse pas d'être de révolution. Ajoutons ici que, dans la figure horizontale, les longueurs respectives des portions étranglée et renflée paraissent égales entre elles.

On voit donc maintenant que le mode de déformation de ces cylindres est bien le résultat d'une propriété qui leur est inhérente. Il résulte, en outre, de l'expérience ci-dessus, que le rapport 3,6 est encore supérieur à la limite de la stabilité, de sorte que la valeur exacte de celle-ci doit se trouver entre les nombres 3 et 3,6.

§ 360. J'ai fait servir aussi à une approximation grossière de la limite dont il s'agit, des cylindres de mercure de petit diamètre réalisés dans l'air par le procédé suivant : on a placé, sur une plaque de verre horizontale, deux fils de cuivre d'environ un millimètre d'épaisseur et de quelques centimètres de longueur, dirigés dans le prolongement l'un de l'autre, mais laissant entre leurs extrémités en regard, extrémités qui étaient amalgamées, un intervalle de 7 à 8 millimètres; puis on a déposé dans cet intervalle un globule de mercure dont le diamètre n'excédait pas deux millimètres; on a rapproché ensuite les fils jusqu'à ce que les deux petites faces amalgamées vinssent toucher le globule et que l'adhérence s'établît. Alors on a fait glisser l'un des fils dans le sens de sa longueur, afin d'étirer le globule liquide et d'essayer de le convertir en un cylindre. Quand le volume du globule était suffisamment petit, on obtenait ainsi, en effet, un cylindre qui conservait sa forme d'une manière permanente. Si, au contraire, le volume du mercure surpassait une certaine grandeur, la petite masse se séparait toujours en deux parties avant que la forme cylindrique fût atteinte. En modifiant le volume du globule, on a tâché d'arriver au plus grand écartement des faces amalgamées pour lequel la formation du cylindre était possible, et l'on a pu reconnaître qu'il était supérieur au triple, mais inférieur au quadruple du diamètre de ce cylindre.

Cette expérience présente quelque difficulté, parce que, pendant les tâtonnements qu'elle exige, le mercure dissout du cuivre et perd de sa fluidité[1]; cependant, avec un peu d'habitude, on parvient à opérer assez vite pour éviter cet inconvénient.

Nous trouverons plus loin, à l'aide de la théorie, la valeur exacte de la limite de stabilité du cylindre, et nous la vérifierons par des expériences plus précises que les précédentes.

§ 361. Dans les cylindres instables que nous venons de former, le rapport entre la longueur et le diamètre était peu considérable; mais qu'arriverait-il si l'on parvenait à obtenir des cylindres d'une grande longueur relativement à leur diamètre? Or, on peut, dans certaines conditions, réaliser des figures de cette espèce exactement ou sensiblement cylindriques, et nous allons voir quels sont alors les résultats de la rupture spontanée de l'équilibre.

Voici le mode d'expérience que j'ai adopté à cet effet, et qui m'a permis d'arriver à certaines lois du phénomène : je vais d'abord décrire d'une manière succincte

(1) Je pense que cette diminution de fluidité n'a lieu d'une manière sensible qu'à la surface de la petite masse : le cuivre qui s'allie au mercure, se trouvant dans un état d'extrême division, se combine avec l'oxygène de l'air environnant, d'où résulte, à la surface du liquide, la formation graduelle d'une mince pellicule d'oxyde. Dès lors, la petite masse de mercure, comme les masses d'huile quand elles se recouvrent de la pellicule dont il a été question au § 17, doit perdre peu à peu de sa tendance à prendre une figure d'équilibre déterminée, et conséquemment paraître moins fluide.

l'appareil et les opérations, et j'ajouterai ensuite les détails nécessaires.

Les pièces principales de l'appareil sont : 1° une plaque rectangulaire de verre à glace, de 25 centimètres de longueur sur 20 de largeur ; 2° deux bandes du même verre, longues de 13 centimètres, larges de 2, et épaisses de 5 à 6 millimètres, parfaitement dressées et polies sur leur épaisseur ; 3° deux bouts de fil de cuivre d'environ 1 millimètre d'épaisseur, et de 5 centimètres de longueur ; ces fils doivent être bien droits, et l'une des extrémités de chacun d'eux doit être coupée bien nettement, puis soigneusement amalgamée.

La plaque étant placée horizontalement, on pose à plat sur sa surface, et parallèlement à ses grands côtés, les deux bandes de verre, de manière à laisser entre elles un intervalle d'environ un centimètre ; puis on introduit dans celui-ci les deux fils de cuivre, en les plaçant en ligne droite dans le sens de la longueur des bandes, et de manière que les extrémités amalgamées se regardent et soient distantes l'une de l'autre de quelques centimètres. Cela fait, on dépose entre ces mêmes extrémités un globule de mercure bien pur, de 5 à 6 millimètres de diamètre, puis on rapproche les deux bandes de verre jusqu'à ce qu'elles viennent toucher les fils, de sorte qu'alors elles ne laissent plus entre elles qu'un intervalle égal en largeur au diamètre de ces mêmes fils.

La petite masse de mercure comprimée ainsi latéralement, est obligée de s'allonger et de marcher des deux côtés vers les surfaces amalgamées. Si elle ne les atteint pas, on fait glisser les fils vers elle, jusqu'à ce que le contact et l'adhérence soient établis. Alors on fait glisser les fils en sens contraire, de manière à les éloigner l'un de l'autre, ce qui détermine un nouvel allongement de la petite masse liquide, et une diminution de ses dimensions verticales. En agissant avec précaution, et en accompagnant l'opération de petits coups donnés avec le doigt sur l'appareil pour faciliter les mouvements du mercure, on parvient à étendre la petite masse jusqu'à ce que son épaisseur verticale soit partout égale à son épaisseur horizontale, c'est-à-dire à celle des fils de cuivre. Le mercure forme ainsi un fil liquide de même diamètre que les fils solides auxquels il est attaché, et d'une longueur de 8 à 10 centimètres. Ce fil, vu la petitesse de son diamètre, qui rend l'action de la pesanteur insensible relativement à celle de l'attraction moléculaire, pourra être considéré comme exactement cylindrique; de sorte que l'on aura, de cette manière, un cylindre liquide ayant une longueur de 80 à 100 fois son diamètre, et attaché par ses extrémités à des parties solides, cylindre qui conserve sa forme tant qu'il demeure emprisonné entre les bandes de verre.

Les choses étant dans cet état, on pose des poids sur les parties des deux fils de cuivre qui font saillie au delà des extrémités des bandes, afin de maintenir ces fils dans des positions bien fixes; puis enfin, à l'aide d'un moyen que nous indiquerons plus bas, on enlève verticalement les deux bandes de verre. Au même instant, le cylindre liquide, libre de ses entraves, se transforme en une série nombreuse de sphères isolées, rangées en ligne droite suivant la direction du cylindre qui leur a donné naissance. Ordinairement la régularité du système de sphères ainsi obtenu laisse à désirer : les sphères présentent des différences dans leurs diamètres respectifs et dans les distances qui les séparent, ce qui provient sans doute de petites causes accidentelles dépendantes du mode d'opération; mais quelquefois les différences sont si minimes, que l'on peut alors considérer la régularité comme parfaite. Quant au nombre de sphères correspondant à un cylindre d'une longueur déterminée, il varie d'une expérience à une autre; mais ces variations, qui sont dues également aux petites causes accidentelles, demeurent comprises entre des limites peu étendues.

§ 362. Dans cette expérience, la transformation s'effectue avec trop de rapidité pour qu'on puisse bien en observer les phases; mais les phénomènes que nous ont présentés nos cylindres d'huile, cylindres plus gros et moins allongés, savoir la formation d'un renflement et d'un étranglement juxtaposés et égaux, ou à peu près, en longueur, l'accroissement graduel en épaisseur de la portion renflée et l'amincissement simultané de la portion étranglée, etc., autorisent à conclure que, dans le cas d'un cylindre dont la longueur est considérable par rapport au diamètre, les choses se passent de la manière suivante: la figure commence par se modifier de manière à offrir une suite régulière et uniforme de portions renflées séparées par des portions étranglées de même longueur qu'elles, ou à peu près; cette altération, d'abord très-faiblement indiquée, va en se prononçant de plus en plus, les portions étranglées s'amincissant graduellement, tandis que les portions renflées augmentent d'épaisseur, et la figure ne cessant pas d'être de révolution; enfin les étranglements se rompent, et les parties de la figure ainsi complétement isolées les unes des autres prennent chacune la forme sphérique.

Nous devons ajouter ici que la fin du phénomène est accompagnée d'une particularité remarquable, dont nous n'avons point encore parlé; mais comme elle ne constitue, pour ainsi dire, qu'une partie accessoire du phénomène général, nous en renvoyons la description plus loin (§ 375).

§ 363. Complétons maintenant la description de notre appareil, et ajoutons quelques détails concernant les opérations.

La plaque de verre devant être amenée à une position parfaitement horizontale, elle est portée, à cet effet, par quatre pieds à vis.

A chacune des extrémités de la surface inférieure des bandes de verre, est collée une petite bande transversale de papier mince, de sorte que les bandes de verre reposant sur la plaque par l'intermédiaire de ces petits papiers, leur surface inférieure n'est pas en contact avec la surface de la plaque. Sans cette précaution, les bandes de verre pourraient contracter avec la plaque une certaine adhérence, qui introduirait un obstacle lors de l'enlèvement vertical de ces mêmes bandes. Celles-ci portent, en outre, sur leur surface supérieure et à 6 millimètres de chacune de leurs extrémités, une petite vis implantée verticalement, la pointe en haut, dans le verre, bien fixée à celui-ci avec du mastic, et s'élevant de 8 millimètres au-dessus de sa surface. Ces quatre vis sont destinées à recevoir des écrous servant à fixer les bandes au système à l'aide duquel on les enlève.

Ce système est en fer; il se compose, en premier lieu, de deux plaques rectangulaires ayant 55 millimètres de longueur, 12 de largeur, et 3 d'épaisseur. Chacune d'elles est percée perpendiculairement à ses grandes faces, de deux trous placés de telle manière qu'en posant chacune de ces plaques transversalement sur les extrémités des deux bandes de verre, les vis dont ces dernières sont munies puissent s'engager dans ces quatre ouvertures. Les vis étant assez longues pour faire saillie au-dessus des ouvertures, on peut alors y adapter de petits écrous, de sorte qu'en serrant ceux-ci, les bandes de verre se trouvent fixées dans une position invariable l'une par rapport à l'autre. Les ouvertures ont une forme allongée dans le sens de la longueur des plaques de fer; de cette manière on peut, après avoir desserré les écrous, augmenter ou diminuer la distance des deux bandes de verre sans être obligé d'enlever les plaques. Sur le milieu de la surface supérieure de chacune des plaques, est implantée une tige verticale de 5 centimètres de hauteur, et les extrémités supérieures de ces deux tiges sont réunies par une tige horizontale, du milieu de laquelle part une troisième tige verticale, dirigée de bas en haut, et longue de 15 centimètres. Cette dernière tige est à section carrée, et son épaisseur est de 5 millimètres. Lorsque les écrous sont serrés, on voit que les bandes de verre, les plaques de fer, et l'espèce de fourche qui réunit celles-ci, constituent un système invariable. La longue tige verticale sert à diriger le mouvement de ce système; à cet effet, elle passe à frottement très-doux dans un conduit de même section qu'elle et de 5 centimètres de hauteur, percé dans une pièce qui est soutenue d'une manière bien fixe, par un support convenable, à 10 centimètres au-dessus de la plaque de verre. Enfin, la pièce percée est munie latéralement d'une vis de pression, qui permet de serrer la tige dans le conduit. A l'aide de cette disposition, si tout l'ensemble de l'appareil a été travaillé avec soin, les deux bandes de verre, une fois les petits écrous serrés, ne pourront se mouvoir qu'avec une parfaite simultanéité, et toujours identiquement dans une même direction perpendiculaire à la plaque de verre.

Lorsque le cylindre liquide est bien formé, et que les poids sont posés sur les portions libres des fils de cuivre, on passe le doigt sous la branche horizontale de la fourche, et l'on soulève le système mobile jusqu'à une hauteur convenable au-dessus de la plaque de verre; puis on le maintient à cette hauteur en serrant la vis de pression, afin d'observer le résultat de la transformation du cylindre.

L'amalgamation des extrémités des fils de cuivre s'étendant toujours un peu sur la surface convexe de ceux-ci, on enduit cette surface d'un vernis, afin que l'amalgamation ne reste à découvert que sur la petite section plane.

Il serait à peu près impossible de juger, à la simple vue, du point précis où il faut cesser d'éloigner les fils de cuivre l'un de l'autre pour que le liquide ait atteint la forme cylindrique. Afin d'écarter cette difficulté, on se donne d'avance la longueur du cylindre, et l'on marque cette longueur, par deux traits déliés, sur la surface latérale de l'une des bandes de verre; puis l'on détermine, par le calcul, d'après le diamètre connu des fils, le poids du globule de mercure qui doit former un cylindre de ce diamètre et de la longueur voulue; enfin, au moyen d'une balance sensible, on fait en sorte que le globule destiné à l'expérience ait exactement ce poids. Il n'y a plus alors qu'à étirer la petite masse jusqu'à ce que les extrémités des fils de cuivre entre lesquels elle est comprise aient atteint les marques tracées sur le verre.

Lorsqu'on fait une série d'expériences, on peut se servir plusieurs fois du même mercure, en réunissant, à la suite de chaque observation, les sphères isolées en une seule masse. Cependant, après un certain nombre d'expériences, le mercure semble perdre de sa fluidité, et la masse se désunit toujours en quelque point, malgré toutes les précautions possibles, avant qu'elle ait été étirée jusqu'à la longueur voulue, phénomènes qui proviennent de ce que les fils solides cèdent un peu de cuivre au mercure (note du § 360). Il faut alors enlever ce dernier, nettoyer les plaques de verre et les bandes, et prendre un nouveau globule. On est parfois aussi obligé de renouveler l'amalgamation des fils.

§ 364. A l'aide de l'appareil et des procédés ci-dessus, j'ai exécuté une suite d'expériences sur la transformation des cylindres; mais, avant d'en rapporter les résultats, il est nécessaire, pour l'interprétation de ceux-ci, d'envisager le phénomène d'un peu plus près.

Concevons un cylindre liquide d'une longueur considérable relativement à son diamètre, et attaché par ses extrémités à deux bases solides; supposons-le effectuant sa transformation, et considérons la figure à une époque du phénomène antérieure à la séparation des masses, c'est-à-dire lorsque cette même figure se compose encore de renflements alternant avec des étranglements. Les surfaces des renflements faisant saillie en dehors de la surface cylindrique primitive, et celles des étranglements se trouvant, au contraire, en dedans de cette même surface, nous pouvons concevoir dans la figure une série de sections planes perpendiculaires à l'axe, et ayant toutes un diamètre égal à celui du cylindre; ces sections constitueront évidemment les limites qui séparent les portions renflées des portions étranglées, en sorte que chaque portion, soit étranglée soit renflée, sera terminée par deux d'entre elles; en outre, les deux bases solides étant nécessairement au nombre des sections dont il s'agit, chacune de ces bases devra occuper l'extrémité même d'une portion étranglée ou renflée.

Cela posé, trois hypothèses se présentent relativement à ces deux portions de la figure, c'est-à-dire à celles qui s'appuient respectivement sur chacune des bases solides. En premier lieu, nous pouvons supposer que ces portions soient toutes deux renflées. Dans ce cas, chacun des étranglements enverra dans les deux renflements qui lui sont immédiatement adjacents le liquide qu'il perd, les mouvements de transport du liquide s'effectueront d'une même manière dans toute l'étendue de la figure, et la transformation pourra s'opérer avec une parfaite régularité, en donnant lieu à des sphères isolées exactement égales en diamètre et également espacées. Seulement, cette régularité ne s'étendra pas aux deux renflements extrêmes : car chacun de ceux-ci se trouvant terminé d'un côté par une surface solide, il ne recevra de liquide que de l'étranglement situé de l'autre côté, et acquerra, par conséquent, moins de développement que les renflements intermédiaires. Dans ces circonstances, on trouverait donc, après la terminaison du phénomène, deux portions de sphère respectivement adhérentes aux deux bases solides, et présentant chacune un diamètre un peu moindre que celui des sphères isolées rangées entre elles.

En second lieu, nous pouvons admettre que les portions extrêmes de la figure soient l'une un étranglement et l'autre un renflement. Alors le liquide perdu par la première ne pouvant traverser la base solide, il sera nécessairement chassé en totalité dans le renflement voisin, de sorte que celui-ci recevant d'un seul côté tout le liquide nécessaire à son développement, il ne devra rien recevoir du côté opposé, et que, par conséquent, tout le liquide perdu par le second étranglement se rendra de même dans le second renflement, et ainsi de suite, jusqu'au renflement extrême. La distribution des mouvements de transport sera donc encore uniforme dans toute la figure, et la transformation pourra également s'effectuer d'une manière parfaitement régulière. La régularité s'étendra même évidemment aux deux portions extrêmes, du moins tant que les étranglements n'auront pas atteint leur plus grande profondeur; mais, au delà de ce point, il n'en sera plus tout à fait ainsi : car alors l'indépendance s'établissant entre les masses, chacun des renflements, à l'exception de celui qui s'appuie sur la base solide, se grossira par les deux côtés à la fois, pour passer à l'état de sphère isolée, en s'appropriant les deux demi-étranglements adjacents, tandis que le renflement extrême ne pourra se grossir que d'un seul côté. Ainsi, après la terminaison du phénomène, on trouverait, à l'une des bases solides, une portion de sphère d'un diamètre peu inférieur à celui des sphères isolées, et, à l'autre base, une portion de sphère beaucoup plus petite, provenant du demi-étranglement qui y est demeuré attaché.

Enfin, en troisième lieu, supposons que les portions extrêmes de la figure soient toutes deux des étranglements, ce qui, après la terminaison du phénomène, laisserait, à chacune des bases solides, une portion de sphère égale à la plus petite des deux ci-dessus. Dans ce cas, pour fixer les idées, partons de l'un de ces étranglements extrêmes, par exemple de celui de gauche. Tout le liquide perdu par ce premier étranglement étant chassé dans le renflement contigu, et suffisant au développement de celui-ci, admettons que tout le liquide perdu par le second étranglement se rende de même dans le second renflement, et ainsi de suite ; alors tous les renflements, à l'exception du dernier à droite, prendront simplement leur développement normal ; mais le renflement de droite, qui reçoit, comme chacun des autres, de la part de l'étranglement qui le précède la quantité de liquide nécessaire à son développement, reçoit, en outre, la même quantité de liquide de la part de l'étranglement qui s'appuie sur la base solide voisine, de sorte qu'il sera plus volumineux que les autres. On voit donc que, dans le cas dont il s'agit, les actions opposées des deux étranglements extrêmes introduisent dans le reste de la figure un excès de liquide. Or, quelque autre hypothèse que l'on fasse sur la distribution des mouvements de transport, il faudra toujours, ou bien que l'excès de volume se répartisse sur tous les renflements à la fois, ou bien qu'il augmente seulement les dimensions d'un ou de deux d'entre eux ; mais la première de ces suppositions est évidemment inadmissible, à cause de la complication qu'elle exigerait dans les mouvements de transport ; il faudrait donc admettre la seconde, et alors les sphères isolées ne seraient pas toutes égales. Ainsi ce troisième mode de transformation amènerait nécessairement par lui-même une cause d'irrégularité, et, en outre, il ne permettrait pas une distribution uniforme des mouvements de transport, puisqu'il y aurait opposition, à l'égard de ces mouvements, au moins dans les deux étranglements extrêmes.

On doit donc regarder comme bien probable que la transformation se disposera suivant l'un ou l'autre des deux premiers modes, et jamais suivant le troisième : c'est-à-dire que les choses s'arrangeront de manière que la figure qui se transforme, ait pour portions extrêmes, soit deux renflements, soit un étranglement et un renflement, mais non deux étranglements. Dans le premier cas, ainsi que nous l'avons vu, le mouvement du liquide de tous les étranglements s'effectuerait des deux côtés à la fois; et, dans le second, ce mouvement aurait lieu pour tous dans un seul et même sens. Si telle est réellement la disposition naturelle au phénomène, on comprend, en outre, que celui-ci la conservera lors même qu'il serait troublé dans sa régularité par de petites causes étrangères. Or c'est ce que confirment, comme nous le verrons, les expériences relatives au cylindre de mercure : bien que la transformation de ce cylindre ait rarement donné un système de sphères parfaitement régulier, j'ai trouvé, dans la grande majorité des résultats, soit chacune des bases solides occupée par une masse peu inférieure en diamètre aux sphères isolées, soit l'une des bases occupée par une semblable masse et l'autre par une masse beaucoup plus petite.

§ 365. Nommons, pour abréger, *divisions* du cylindre les portions de la figure dont chacune fournit une sphère, soit que nous considérions ces portions par la pensée dans le cylindre même, avant le commencement de la transformation, soit que nous les prenions pendant l'accomplissement du phénomène, c'est-à-dire pendant les modifications qu'elles subissent pour arriver à la forme sphérique. La longueur d'une division est évidemment la distance qui, pendant la transformation, se trouve comprise entre les cercles de gorge de deux étranglements voisins, et elle est, par conséquent, égale à la somme des longueurs d'un renflement et de deux demi-étranglements. D'après cela, voyons comment la longueur dont il s'agit, c'est-à-dire celle d'une division, se déduira du résultat d'une expérience.

Supposons la transformation parfaitement régulière, et soit λ la longueur d'une division, l celle du cylindre, et n le nombre de sphères isolées trouvées après la terminaison du phénomène. Chacune de ces sphères étant fournie par une division complète, et chacune des deux masses extrêmes par une portion de division, la longueur l se composera de n fois λ, plus deux fractions de λ. Pour estimer les valeurs de ces fractions, rappelons-nous que la longueur d'un étranglement est exactement ou sensiblement égale à celle d'un renflement (§ 359); or, dans le premier des deux cas normaux (§ précéd.), c'est-à-dire lorsque les masses demeurées adhérentes aux bases après la terminaison du phénomène sont toutes deux de la grande espèce, chacune d'elles provient évidemment d'un renflement plus un demi-étranglement, et, par conséquent, des trois quarts d'une division; la somme des longueurs des deux portions du cylindre qui ont fourni ces masses est donc égale à une fois et demie λ, et l'on aura, dans ce cas, $l = (n + 1{,}5)\,\lambda$, d'où $\lambda = \frac{l}{n + 1{,}5}$. Dans le second cas, c'est-à-dire lorsque les masses extrêmes sont l'une de la grande et l'autre de la petite espèce, cette dernière provient d'un demi-étranglement, ou du quart d'une division, de sorte que la somme des longueurs des portions du cylindre correspondantes à ces deux masses est égale à λ, et que, par conséquent, on aura $\lambda = \frac{l}{n + 1}$.

Les dénominateurs respectifs de ces deux expressions représentant le nombre de divisions contenu dans la longueur totale du cylindre, il s'ensuit que ce nombre sera toujours soit un nombre entier simplement, soit un nombre entier plus un demi. D'autre part, puisque le phénomène est régi par des lois déterminées, on comprend que, pour un cylindre d'un diamètre donné, formé d'un liquide donné, et placé dans des circonstances données, il existe une longueur normale que les divisions tendent à prendre, et qu'elles prendraient rigoureusement si la longueur totale du cylindre était infinie. Si donc il arrive que la longueur totale du cylindre, bien que limitée, est égale au produit de la longueur normale des divisions par un nombre entier ou bien par un nombre entier plus un demi, rien n'empêchera les divisions de prendre exactement cette longueur normale. Si, au contraire, ce qui aura lieu en général, la longueur totale du cylindre ne remplit pas l'une ou l'autre des deux conditions précédentes, on doit croire que les divisions prendront la longueur la plus approchée possible de la longueur normale; et alors, toutes choses égales d'ailleurs, la différence sera évidemment d'autant moindre que les divisions seront plus nombreuses, ou, en d'autres termes, que le cylindre sera plus long. On doit croire aussi que la transformation adoptera celui des deux modes le plus propre à atténuer la différence dont il s'agit, et c'est ce que confirme encore l'expérience, comme nous le verrons bientôt.

Ainsi que je l'ai déjà dit, quoique la transformation du cylindre de mercure se dispose presque toujours suivant l'un ou l'autre des deux modes normaux, le résultat est rarement très-régulier; il faut donc admettre que de petites causes perturbatrices accidentelles rendent, en général, les divisions formées dans une même expérience inégales en longueur; mais alors les expressions de λ obtenues plus haut donnent évidemment, dans chaque expérience, la longueur moyenne de ces divisions, ou, en d'autres termes, la longueur commune que les divisions auraient prise si la transformation s'était opérée d'une manière parfaitement régulière en donnant lieu au même nombre de sphères isolées et au même état des masses extrêmes.

Enfin, puisque le troisième mode de transformation s'est présenté, c'est-à-dire puisqu'il est arrivé quelquefois que chacune des bases se soit trouvée occupée par une masse de la petite espèce, si l'on veut faire abstraction de la cause particulière d'irrégularité inhérente à ce mode (§ précéd.), et chercher l'expression correspondante de λ, il suffit de remarquer que chacune des masses extrêmes provient alors d'un demi-étranglement, ou du quart d'une division, ce qui donnera évidemment $\lambda = \frac{l}{n + 0,5}$.

§ 366. Je vais maintenant rapporter les résultats des expériences. Le diamètre des fils de cuivre, et par conséquent du cylindre, était de $1^{mm},05$; j'ai donné d'abord au cylindre une longueur de 90^{mm}, et j'ai répété dix fois l'expérience, en annotant, après chacune d'elles, le nombre des sphères isolées produites et l'état des masses adhérentes aux bases; puis j'ai calculé, pour chaque résultat, la valeur correspondante de la longueur d'une division, au moyen de celle des trois formules du paragraphe précédent qui se rapportait à ce même résultat.

J'ai fait ensuite dix nouvelles expériences, en donnant au cylindre une longueur de 100^{mm}, et j'ai calculé de même les valeurs correspondantes de la longueur d'une division.

Voici le tableau des résultats fournis par ces cylindres, et des valeurs que l'on en tire pour la longueur d'une division. Chacune des deux séries ne m'a donné qu'un seul résultat parfaitement régulier; je l'ai indiqué par le signe * placé à côté du nombre de sphères isolées correspondant.

LONGUEUR DU CYLINDRE, 90mm.			LONGUEUR DU CYLINDRE, 100mm.		
NOMBRE des SPHÈRES ISOLÉES.	MASSES ADHÉRENTES AUX BASES.	LONGUEUR d'une DIVISION.	NOMBRE des SPHÈRES ISOLÉES.	MASSES ADHÉRENTES AUX BASES.	LONGUEUR d'une DIVISION.
		mm.			mm.
10	Deux grandes.	7,83	11	Une grande et une petite.	8,33
*12	Id.	6,67	14	Deux grandes.	6,45
12	Deux petites.	7,20	14	Id.	6,45
15	Deux grandes.	5,45	14	Id.	6,45
14	Id.	5,81	*14	Une grande et une petite.	6,67
11	Id.	7,20	13	Id.	7,14
11	Id.	7,20	11	Deux grandes.	8,00
12	Une grande et une petite.	6,92	14	Une grande et une petite.	6,67
13	Deux grandes.	6,21	13	Deux grandes.	6,90
11	Id.	7,20	10	Id.	8,69

Comme on le voit dans ce tableau, en premier lieu, les différentes valeurs que l'on obtient pour la longueur d'une division ne s'écartent pas assez les unes des autres pour que l'on puisse méconnaître une tendance vers une valeur constante dont l'uniformité n'est altérée que par l'influence de petites causes accidentelles.

En second lieu, sur les vingt expériences, il est arrivé seulement une fois, que les masses adhérentes aux bases ont été l'une et l'autre de la petite espèce.

En troisième lieu, les deux résultats parfaitement réguliers ont donné identiquement la même valeur pour la longueur d'une division; cette valeur exprimée d'une manière approchée avec deux décimales, est $6^{mm},67$; mais son expression exacte est $6^{mm}\frac{2}{3}$: car l'opération à effectuer consiste, pour le cas de la première série, dans la division de 90^{mm} par 13,5, et, pour le cas de la seconde série, dans la division de 100^{mm} par 15. Comme les deux longueurs données au cylindre sont considérables relativement au diamètre, et que, par suite, les nombres de division sont assez grands, cette valeur $6^{mm}\frac{2}{3}$ doit constituer à fort peu près, sinon rigoureusement, celle de la longueur normale des divisions. On voit, en outre, que, pour donner aux divisions cette valeur très-approchée ou exacte de la longueur normale, la transformation a choisi, d'une part le premier mode, et d'autre part le second mode.

§ 367. Citons d'autres exemples de la transformation spontanée d'un cylindre liquide très-long par rapport à son diamètre :

Les physiciens savent que lorsqu'on fait passer, à travers un mince fil de fer tendu horizontalement, une décharge électrique d'une énergie suffisante, on voit d'abord le fil rougir à blanc, puis se résoudre en un grand nombre de globules séparés qui tombent, et dont on peut constater, après leur refroidissement, la forme arrondie.

En second lieu, un fil de coton de 20 à 25 centimètres de longueur est tendu entre les deux extrémités d'un arc en bois, dont il forme la corde; on remplit d'huile un grand plat, et l'on y fait plonger le fil, qui doit avoir été préalablement bien imprégné du même liquide, puis on le retire avec une vitesse convenable, en le maintenant dans une position horizontale. Au moment où il sort de l'huile, celle-ci constitue autour de lui une enveloppe sensiblement cylindrique de petit diamètre, laquelle se transforme aussitôt, d'une manière à fort peu près régulière, en un grand nombre de petites masses séparées les unes des autres et traversées par le fil comme des perles; si le fil a 25 centimètres de longueur, on y compte près de cent de ces perles. Je n'ai pas besoin de faire remarquer que les perles liquides dont il s'agit ne sont pas sphériques; l'action du fil les allonge un peu, et en fait de petits onduloïdes renflés. Cette expérience est due à mon fils Félix[1], qui l'a variée de différentes manières.

Enfin je ne puis résister au désir d'exposer un procédé ingénieux qui m'a été suggéré par M. Donny, pour réaliser avec une grande régularité, dans le liquide alcoolique, un cylindre d'huile très-long par rapport à son diamètre, et en observer la transformation.

Au centre du fond d'un vase cylindrique en verre de 7 à 8 centimètres de diamètre et de 60 de hauteur, est mastiqué un petit disque en fer d'un centimètre de diamètre et de quelques millimètres d'épaisseur; un tube en verre ou en fer d'un centimètre de diamètre intérieur occupe l'axe de ce vase, et embrasse à frottement doux, par son extrémité inférieure, le petit disque ci-dessus; ce tube dépasse le haut du vase, et contient un piston dont la tige, d'une longueur suffisante, est attachée par son extrémité supérieure à un support fixe; le piston ainsi maintenu est à un centimètre ou deux plus bas que l'orifice du vase; il ne peut ni monter ni descendre, mais pour lui faire parcourir la longueur du tube, il suffit, on le voit, de donner à celui-ci un mouvement ascensionnel; ce mouvement est guidé par des pièces convenables, de façon à s'effectuer sans oscillations; enfin, le tube étant

(1) *Sur la transformation d'un cylindre liquide en sphères isolées* (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 1867, 2me série, t. XXIV, p. 21). Voir aussi l'article inscrit au § 508 sous le n° 30.

descendu, concevons qu'il soit rempli d'huile jusqu'au piston, et que le vase soit plein de liquide alcoolique.

Les choses étant ainsi disposées, faisons monter le tube avec une rapidité que des essais préalables auront déterminée; l'huile que le piston empêche complétement de s'élever, demeurera tout entière dans le liquide ambiant, où elle devra constituer un cylindre régulier s'étendant du petit disque de fer à l'extrémité inférieure du tube, et ayant en longueur au moins cinquante fois son diamètre. Ce cylindre commencera aussitôt à se transformer, et le phénomène devra s'accomplir avec une grande régularité.

Je n'ai pas essayé ce procédé, mais la réussite m'en paraît très-probable; la seule difficulté réelle consisterait, je pense, dans l'égalisation des deux densités; car, avec une hauteur aussi grande, une différence extrêmement faible entre ces densités pourrait altérer la régularité de la figure d'huile dès l'origine même de la transformation.

Si l'on peut étirer le verre en fils déliés sans qu'ils se convertissent en petites masses isolées, c'est qu'on n'élève pas assez la température de la substance pour amener celle-ci à l'état liquide : elle est simplement rendue sirupeuse, ce qui introduit déjà une grande résistance à la transformation, et, en outre, à mesure que le fil se forme, il est solidifié par le froid de l'air ambiant. De même si l'araignée et le ver à soie produisent leurs fils, c'est que, sans doute, la matière émise par leurs filières possède originairement une assez forte viscosité, et que, par suite de l'extrême ténuité de ces fils, la matière dont il s'agit est coagulée au moment de sa sortie.

§ 368. Ici doit se placer une remarque importante, dont nous ferons plus loin l'application : le phénomène de la conversion en sphères isolées n'est pas le résultat d'une propriété appartenant exclusivement à la forme cylindrique; il se produit à l'égard de toute figure liquide dont une dimension est considérable relativement aux deux autres : par exemple, dans l'expérience du § 222, si l'on crève en son milieu l'une quelconque des deux lames planes qui résultent de la désunion spontanée du caténoïde, l'huile qui constitue cette lame se retire rapidement dans tous les sens vers l'anneau métallique, le long duquel elle forme un joli anneau liquide; or celui-ci, dont les dimensions transversales sont fort petites, ne tarde pas à se transformer spontanément en une suite nombreuse de petites masses isolées que le fil métallique traverse, et qui, sans la présence de ce fil, seraient des sphères exactes.

Disons, en passant, que l'anneau liquide ci-dessus, au moment où il vient de se former, réalise la partie du nodoïde engendrée par un nœud de la ligne méridienne, dans le cas où ce nœud approche d'une circonférence de cercle (§ 75); avec un anneau métallique de 70^{mm} de diamètre, la section méridienne de l'anneau liquide est sensiblement circulaire, et son diamètre n'est que de 2^{mm} à 3^{mm}.

§ 369. Poursuivons la recherche des lois de la transformation spontanée des longs cylindres; on verra, dans le chapitre XI, pourquoi nous donnons à cette partie de notre travail un développement si étendu.

On doit regarder à priori comme évident, que deux cylindres formés d'un même liquide et placés dans les mêmes circonstances, mais différents en diamètre, tendront à se diviser d'une manière semblable : c'est-à-dire que les longueurs normales respectives des divisions seront entre elles dans le rapport des diamètres de ces cylindres.

Afin de vérifier cette loi par l'expérience, je me suis procuré des fils de cuivre d'un diamètre exactement double de celui des premiers, et égal, par conséquent, à $2^{mm},1$, et j'ai exécuté avec ceux-ci une nouvelle série de dix expériences, en donnant au cylindre une longueur de 100^{mm}. Cette série ne m'a fourni également qu'un seul résultat parfaitement régulier, que j'ai indiqué, comme précédemment, par le signe * placé en regard du nombre de sphères isolées correspondant. Voici le tableau relatif à la série dont il s'agit.

NOMBRE des SPHÈRES ISOLÉES.	MASSES ADHÉRENTES AUX BASES.	LONGUEUR d'une DIVISION.
		mm.
7	Deux petites.	13,33
6	Deux grandes.	13,33
6	Une grande et une petite.	14,28
7	id. id.	12,50
*6	Deux grandes.	13,33
6	id.	13,33
6	Une grande et une petite.	14,28
8	id. id.	11,11
8	Deux petites.	11,76
6	Une grande et une petite.	14,28

En s'arrêtant à la seconde décimale, on a ici, comme on voit, pour la longueur d'une division correspondante au résultat parfaitement régulier, la valeur $13^{mm},33$; mais comme l'opération qui la donne consiste dans la division de 100^{mm} par 7,5, la valeur exprimée d'une manière complète est $13^{mm}\frac{1}{3}$. Telle est donc à fort peu près, sinon exactement, la longueur normale des divisions de ce nouveau cylindre; or cette longueur $13^{mm}\frac{1}{3}$

est précisément double de la longueur $6^{mm}\frac{2}{3}$, qui appartient aux divisions du cylindre du § 366; ces deux longueurs sont donc effectivement entre elles dans le rapport des diamètres des deux cylindres.

Le résultat parfaitement régulier du tableau ci-dessus ayant présenté une masse de la grande espèce à chacune des bases, il s'ensuit que, pour permettre aux divisions du cylindre actuel de prendre leur longueur normale ou la longueur la plus approchée possible de cette dernière, la transformation a dû se disposer suivant le premier mode; tandis qu'à l'égard d'un cylindre moitié moindre en diamètre, et ayant la même longueur totale 100^{mm}, la transformation s'était disposée suivant le second mode.

Ici encore, le cas de deux masses de la petite espèce aux bases solides est le moins fréquent, bien qu'il se soit montré deux fois.

Enfin les différentes valeurs de la longueur d'une division sont plus concordantes que dans les deux séries relatives au premier diamètre, et manifestent mieux, par conséquent, la tendance vers une valeur constante; on voit même que la longueur normale est celle qui s'est reproduite le plus souvent.

§ 370. D'après la loi que nous venons d'établir, lorsque la nature du liquide et les circonstances extérieures ne changent pas, la longueur normale des divisions est proportionnelle au diamètre du cylindre; ou bien encore, en d'autres termes, le rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre du cylindre est constant.

Le cylindre du § 366 avait, comme nous l'avons vu, un diamètre de $1^{mm},05$, et la longueur normale de ses divisions était à fort peu près de $6^{mm},67$; par conséquent, lorsque le liquide est du mercure et que le cylindre repose sur une plaque de verre, la valeur du rapport constant dont il s'agit est, avec une grande approximation, $\frac{6,67}{1,05} = 6,35$.

Examinons maintenant si les circonstances extérieures et la nature du liquide influent sur ce rapport, et commençons par les premières.

Notre cylindre de mercure doit contracter, sur toute la ligne suivant laquelle il touche la plaque de verre, une petite adhérence avec cette plaque, adhérence qui doit entraver plus ou moins la transformation. Pour découvrir si cette résistance influait sur la longueur normale des divisions, et, par suite, sur le rapport entre celle-ci et le diamètre du cylindre, un moyen simple se présentait, c'était d'augmenter cette même résistance. Afin d'arriver à ce résultat, j'ai disposé l'appareil de manière à n'enlever qu'une des bandes de verre, de sorte que la figure liquide demeurait alors en contact à la fois avec la plaque et avec l'autre bande. J'ai répété encore dix fois l'expérience, en employant les fils de cuivre de $1^{mm},05$ de diamètre, et en donnant au cylindre une longueur de 100^{mm}. Les résultats ont été les suivants :

NOMBRE des SPHÈRES ISOLÉES.	MASSES ADHÉRENTES AUX BASES.	LONGUEUR d'une DIVISION.
		mm.
9	Une grande et une petite.	10,00
8	Id.	11,11
9	Id.	10,00
8	Id.	11,11
11	Deux petites.	8,69
8	Une grande et une petite.	11,11
8	Id.	11,11
8	Deux grandes.	10,53
8	Une grande et une petite.	11,11
6	Deux grandes.	13,33

On voit que les différentes valeurs de la longueur d'une division sont toutes, une seule exceptée, notablement supérieures à toutes celles qui se rapportent à un cylindre de même diamètre dont la surface ne touche le verre que par une seule ligne (§ 366). Il faut donc conclure de là que, toutes choses égales d'ailleurs, la longueur des divisions croît avec la résistance extérieure, et que, par conséquent, sous l'action d'une semblable résistance, cette longueur est nécessairement plus grande qu'elle ne le serait si le cylindre avait sa surface convexe entièrement libre.

Dans la série ci-dessus, aucun résultat ne s'est montré fort régulier; mais on comprend que la moyenne des valeurs de la troisième colonne approchera de la longueur normale des divisions. C'est, d'ailleurs, ce que confirment les tableaux des §§ 366 et 369 : si l'on prend dans le premier les moyennes respectives des valeurs des deux séries, on trouvera pour l'une $6^{mm},77$, et pour l'autre $7^{mm},17$, quantités dont la première est presque égale à la longueur $6^{mm},67$, qui peut être considérée comme la longueur normale, et dont la seconde n'en diffère pas considérablement; et si l'on prend de même la moyenne relative au tableau suivant, on trouvera $13^{mm},15$, quantité très-voisine de la longueur $13^{mm},33$, qui peut aussi, dans le cas du second tableau, être regardée comme la longueur normale. Or, la moyenne correspondante au tableau ci-dessus est $10^{mm},81$; par conséquent, dans le cas de deux lignes de contact, nous aurons pour la valeur approchée du rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre du cylindre, $\frac{10,81}{1,05} = 10,29$, tandis que, dans le cas d'une seule ligne de contact, nous avons trouvé seulement 6,35.

Ainsi, en définitive, le rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre du cylindre augmente par l'effet d'une résistance extérieure.

§ 371. En l'absence complète d'une semblable résistance, le rapport ne doit donc plus dépendre que de la nature du liquide. Mais je dis qu'il y a une limite audessous de laquelle ce même rapport ne peut descendre, et que celle-ci est précisément la limite de la stabilité.

Concevons un cylindre liquide d'une longueur suffisante par rapport au diamètre, compris entre deux bases solides, et effectuant sa transformation avec une régularité parfaite. Supposons, pour fixer les idées, que le phénomène se soit disposé suivant le second mode, ou, en d'autres termes, que les portions extrêmes de la figure soient l'une un étranglement et l'autre un renflement; alors, comme nous l'avons vu (§ 364), la régularité de la transformation s'étendra à ces dernières portions, c'est-à-dire que l'étranglement et le renflement extrêmes seront respectivement identiques avec les portions de même espèce du reste de la figure. Cela posé, prenons la figure à une époque du phénomène où elle ne présente encore que des étranglements et des renflements, et considérons de nouveau les sections dont le diamètre est égal à celui du cylindre (ibid.). Partons de la portion extrême étranglée; la base solide sur laquelle celle-ci s'appuie, et qui constitue la première des sections dont il s'agit, occupera, comme nous l'avons fait voir, l'origine même de l'étranglement; puis nous aurons une seconde section à l'origine du premier renflement; une troisième à l'origine du second étranglement, une quatrième à l'origine du second renflement, et ainsi de suite; de sorte que toutes les sections d'ordre impair occuperont les origines des étranglements, et toutes celles d'ordre pair, les origines des renflements. L'intervalle compris entre deux sections d'ordre impair consécutives renfermera donc un étranglement et un renflement; et puisque la figure commence par un étranglement et se termine par un renflement, il est clair que sa longueur totale se trouvera partagée en un nombre entier de semblables intervalles. En vertu de l'exacte régularité que nous avons supposée dans la transformation, tous les intervalles dont il s'agit seront égaux en longueur; et comme l'instant où nous considérons la figure peut être pris arbitrairement depuis l'origine du phénomène jusqu'au maximum d'approfondissement des étranglements, il s'ensuit que l'égalité de longueur des intervalles subsiste pendant toute cette période, et que, par conséquent, les sections qui terminent ces intervalles conservent pendant cette même période des positions parfaitement fixes. En outre, les parties de la figure respectivement contenues dans chacun des intervalles subissant identiquement et simultanément les mêmes modifications, les volumes de toutes ces parties demeurent égaux entre eux; et comme leur somme est toujours égale au volume total du liquide, il s'ensuit que, depuis l'origine de la transformation jusqu'au maximum d'approfondissement des étranglements, chacun de ces volumes partiels demeure invariable, ou, en d'autres termes, qu'aucune portion de liquide ne passe d'un intervalle dans les intervalles adjacents. Ainsi, à l'instant où nous considérons la figure, d'une part les deux sections qui terminent un même intervalle auront conservé leurs positions et leurs diamètres primitifs, et, d'autre part, ces sections n'auront été franchies par aucune portion de liquide. Les choses se seront donc passées dans chaque intervalle absolument de la même manière que si les deux sections qui le terminent eussent été des disques solides. Mais, entre deux disques solides, la transformation ne peut s'opérer si le rapport entre la distance qui sépare ces disques et le diamètre du cylindre est plus petit que la limite de la stabilité; donc le rapport entre la longueur de nos intervalles et le diamètre du cylindre ne peut être inférieur à cette même limite . Or, la longueur d'un intervalle est évidemment égale à celle d'une division : car la première est, d'après ce que nous avons vu ci-dessus, la somme des longueurs d'un renflement et d'un étranglement, et la seconde est la somme des longueurs d'un renflement et de deux demi-étranglements (§ 365); donc le rapport entre la longueur d'une division et le diamètre du cylindre ne peut être moindre que la limite de la stabilité; et nous remarquerons ici que cette conclusion est également vraie, soit que les divisions puissent ou non prendre exactement leur longueur normale.

§ 372. Passons à ce qui concerne la nature du liquide. La viscosité intérieure engendre nécessairement une résistance qui doit aussi rendre la transformation moins facile; et puisque les résistances extérieures augmentent la longueur des divisions, il est à présumer que la viscosité intérieure agit de la même manière, et que, par conséquent, toutes choses égales d'ailleurs, le rapport dont nous nous occupons croît avec cette même viscosité. Cependant celle-ci ne peut exercer une influence bien considérable; en effet, la résistance qu'elle oppose aux déplacements relatifs des molécules diminue rapidement, nous le savons, avec la vitesse de ces déplacements; or, quand la transformation commence, c'est avec une vitesse minime , et qui va ensuite en s'accélérant; on doit donc admettre qu'à l'origine du phénomène, la résistance due à la viscosité intérieure est faible, et conséquemment ne produit jamais un grand allongement des divisions[1]. Enfin la viscosité superficielle a sans doute aussi quelque influence, du moins à l'égard des liquides de la première et de la troisième catégorie (Chap. VII).

§ 373. Il résulte de cette discussion concernant les résistances, que la plus petite valeur que l'on puisse supposer au rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre du cylindre, correspond au cas où il y aurait à la fois absence complète de résistance extérieure et de viscosités; et, d'après la démonstration donnée dans le § 371, cette plus petite valeur serait au moins égale à la limite de la stabilité. Or, comme tous les liquides sont plus ou moins visqueux, il s'ensuit comme très-probable, que, même dans l'hypothèse de l'annulation de toute résistance extérieure, le rapport dont il s'agit surpassera toujours la limite de la stabilité; et puisque celle-ci est supérieure à 3, ce même rapport sera, à plus forte raison, toujours supérieur à 3.

Il est à croire que la plus petite valeur ci-dessus considérée, c'est-à-dire celle qu'aurait le rapport dans le cas d'une absence complète de résistance tant intérieure qu'extérieure, serait égale à la limite même de la stabilité, ou la surpasserait excessivement peu. En effet, d'une part, le rapport s'approche de cette limite à mesure que les résistances diminuent, et, d'autre part, pour peu qu'il la dépasse, la transformation devient possible (§ 371); on ne voit donc pas de raison pour qu'il en différât sensiblement si les résistances étaient absolument nulles. C'est d'ailleurs ce que les résultats de nos

(1) Une expérience décrite dans ma 2e Série m'avait conduit à exagérer l'influence de la viscosité sur la longueur des divisions; j'ai reconnu, plus tard, que l'expérience dont il s'agit présentait, à cet égard, une cause d'erreur; c'est pourquoi je ne l'ai pas reproduite dans l'ouvrage actuel.

expériences tendent à confirmer. D'abord, en effet, puisque le rapport appartenant à notre cylindre de mercure descend de 10,29 à 6,35 en passant du cas où le cylindre touche le verre par deux lignes à celui où il ne le touche que par une seule, il est clair que si ce dernier contact pouvait être lui-même supprimé, ce qui ne laisserait plus subsister que la seule influence des viscosités, le rapport deviendrait de beaucoup inférieur à 6,35; et comme, d'un autre côté, il doit surpasser 3, nous pouvons bien admettre qu'il se trouverait du moins compris entre ce dernier nombre et 4, de sorte qu'il se rapprocherait beaucoup de la limite de la stabilité. Si donc il était possible d'annuler aussi les viscosités, le nouveau décroissement que subirait alors le rapport amènerait bien probablement celui-ci jusqu'à la limite même dont il s'agit, ou du moins jusqu'à une valeur qui en différerait excessivement peu.

Ainsi, d'une part, la plus petite valeur du rapport, celle qui correspondrait à une complète nullité de résistances, ne différerait pas ou ne différerait guère de la limite de la stabilité; et, d'autre part, sous l'influence des viscosités seules le rapport appartenant au mercure s'éloignerait peu de cette plus petite valeur. On voit donc, du moins à l'égard du mercure, que l'influence de la viscosité, tant extérieure qu'intérieure, est réellement faible, et, d'après ce que nous avons dit plus haut, il doit en être à peu près de même à l'égard des autres liquides.

De là résulte qu'en l'absence de toute résistance extérieure, les valeurs du rapport respectivement correspondantes aux divers liquides ne pourront, malgré les différences de viscosités, s'éloigner beaucoup de la limite de la stabilité; et comme le plus petit nombre entier supérieur à celle-ci est 4, nous pouvons adopter ce nombre comme représentant, en moyenne, la valeur approximative probable du rapport dont il s'agit.

En partant de cette valeur, le calcul donne, pour le rapport entre le diamètre des sphères isolées qui résultent de la transformation et le diamètre du cylindre, le nombre 1,82, et pour le rapport entre la distance de deux sphères voisines et ce même diamètre, le nombre 2,18.

Nous verrons plus loin (§ 406) que la théorie rend parfaitement raison de l'influence des résistances sur la longueur des divisions.

§ 374. Une autre conséquence découle encore de notre discussion. Soit, pour simplifier, le diamètre du cylindre pris comme unité. Alors le rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre exprimera cette longueur normale elle-même, et le rapport qui constitue la limite de la stabilité exprimera la longueur même correspondante à cette limite. Ceci convenu, reprenons la conclusion à laquelle nous sommes arrivés au commencement du paragraphe précédent, conclusion que nous énoncerons, par conséquent, ici en disant que pour tous les liquides la longueur normale des divisions surpasse toujours la limite de la stabilité; rappelons-nous, en second lieu, que la somme des longueurs d'un étranglement et d'un renflement est égale à celle d'une division (§ 371), et, en troisième lieu, que la longueur d'un étranglement est égale, ou à peu près, à celle d'un renflement (§ 359). Or, de l'ensemble de ces propositions il résulte que, lorsque la transformation d'un cylindre commence à s'effectuer, la longueur d'une seule portion, soit étranglée, soit renflée, est nécessairement supérieure à la moitié de la limite de la stabilité ; et que, par conséquent, la somme des longueurs de trois portions contiguës, par exemple de deux renflements et de l'étranglement intermédiaire, est supérieure à une fois et demie cette même limite. Donc enfin, si la distance des bases solides est comprise entre une fois et une fois et demie la limite de la stabilité, il est impossible que la transformation donne lieu à trois portions, et elle ne pourra, par conséquent, produire alors qu'un seul renflement juxtaposé à un seul étranglement. C'est, en effet, comme nous l'avons vu, toujours de cette manière que la chose s'est passée à l'égard du cylindre du § 359, cylindre qui se trouvait évidemment dans la condition ci-dessus, et l'on s'explique maintenant la non-symétrie de sa transformation.

§ 375. Ainsi que nous l'avons annoncé en terminant le § 362, nous avons encore à décrire un fait remarquable qui accompagne toujours la fin du phénomène de la transformation d'un cylindre liquide.

Dans la transformation des gros cylindres d'huile, soit imparfaits, soit exacts (§§ 45 et 359), lorsque la partie étranglée s'est considérablement amincie, et que la séparation semble sur le point d'avoir lieu, on voit les deux masses refluer rapidement vers les anneaux ou

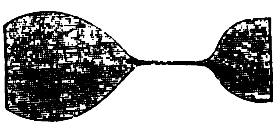

Fig. 97.

les disques; mais elles laissent entre elles un filet cylindrique qui établit encore, pendant un temps très-court, la continuité de l'une à l'autre (*fig.* 97); puis ce filet se résout lui-même en masses partielles. Généralement il se divise en trois parties, dont les deux extrêmes vont se confondre avec les deux grosses masses, et dont l'intermédiaire forme une sphérule de quelques millimètres de diamètre, qui demeure isolée au milieu de l'intervalle qui sépare les grosses masses; en outre, dans chacun des intervalles entre cette sphérule et les deux grosses masses, on voit une autre sphérule beaucoup plus petite, ce qui indique que la séparation des parties du filet ci-dessus s'est effectuée de même par des effilements; la *fig.* 98 montre cet état définitif du système liquide.

Dans le cas de nos cylindres de mercure, la résolution en sphères s'accomplit en trop peu d'instants pour qu'on puisse apercevoir la formation des filets; mais on trouve toujours, dans plusieurs des intervalles entre les sphères, une ou deux sphérules très-petites, d'où l'on peut conclure que la séparation s'est effectuée par le même mode.

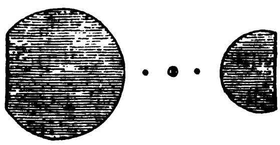

Fig. 98.

Maintenant que nous connaissons toute la marche que doit suivre la transformation d'un cylindre liquide en sphères isolées, nous pouvons la représenter graphiquement; la *fig.* 99 montre plusieurs des formes successives par lesquelles passe graduellement la figure liquide, à partir du cylindre jusqu'au système de sphères isolées et de sphérules. Cette figure se rapporte au cas d'une liberté extérieure complète; par conséquent, d'après la conclusion probable qui termine le § 373, le rapport entre la longueur des divisions et le diamètre a été pris égal à 4.

Le phénomène de la formation des filets et de leur résolution en sphérules n'est pas borné au cas de la rupture de l'équilibre des cylindres liquides; sauf de rares exceptions dont nous parlerons plus loin, il se manifeste toutes les fois qu'une de nos masses liquides, quelle que soit sa figure, se divise en masses partielles : par exemple, lorsque l'expérience des §§ 222 et 368 est effectuée avec soin, et que les anneaux liquides qui se forment après la rupture des deux lames planes se sont

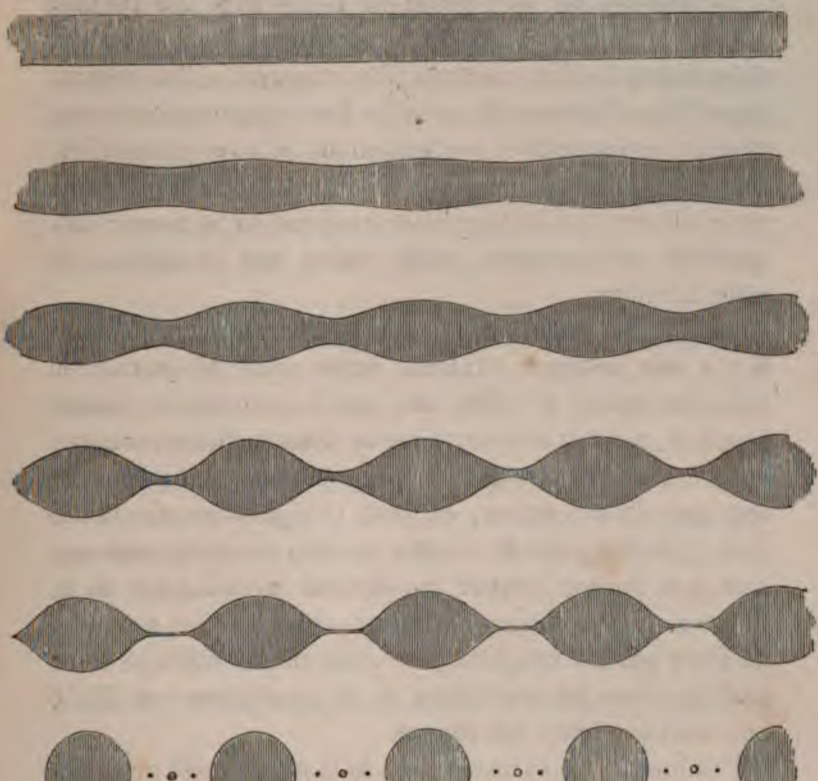

Fig. 99.

convertis en masses isolées, il y a, dans chacun des intervalles entre celles-ci, une masse plus petite, c'est la sphérule; seulement ces petites masses sont relativement plus volumineuses que celle qui se montre après la transformation de nos cylindres d'huile courts; en outre, la durée de la transformation des anneaux liquides dont il s'agit est de plusieurs secondes; on constate donc sans peine la formation des filets et la conversion de chacun d'eux en sa sphérule.

Le phénomène se produit de même avec les liquides soumis à l'action libre de la pesanteur, bien qu'il soit alors moins facile à constater. Par exemple, si l'on trempe dans l'éther l'extrémité arrondie d'une baguette de verre, et qu'on retire celle-ci verticalement et avec précaution, l'on voit, à l'instant où la petite quantité de liquide qui reste adhérente à la baguette se sépare de la masse, une sphérule extrêmement petite rouler sur la surface de cette dernière.

§ 376. Essayons d'expliquer la génération des filets. Il y a une analogie évidente entre cette génération et celle des lames ; en effet, une lame commence en général à naître, nous le savons, lorsque deux surfaces concaves opposées et qui vont en se rapprochant graduellement, sont près de se toucher ; et, dans la séparation spontanée d'un cylindre plein en masses isolées, les filets commencent à se former lorsque les sections méridiennes de la figure sont peu éloignées de se toucher par les sommets de leurs parties concaves ; or nous allons voir que cette analogie dans les conditions de la production est liée à une analogie entre les causes.

Pendant qu'un cylindre liquide instable passe graduellement à l'état de masses séparées, les étranglements ne peuvent s'approfondir qu'en chassant leur liquide dans les renflements. Cela étant, considérons, à une époque du phénomène antérieure à l'apparition des filets, une section d'un étranglement assez rapprochée de celle du milieu pour qu'on passant de l'une à l'autre le diamètre demeure sensiblement le même ; la quantité de liquide perdue, dans un intervalle de temps donné, par la tranche comprise entre ces deux sections, quantité qui traverse nécessairement dans ce même temps la section considérée, est évidemment mesurée par la différence des volumes de deux cylindres ayant pour longueur commune la distance des deux sections, et pour rayons ceux de ces sections au commencement et à la fin du temps dont il s'agit. Si nous partageons la durée totale de la transformation en intervalles égaux et très-petits, et si nous désignons par r la première valeur du rayon, par α la diminution qu'il subit dans l'un de ces petits intervalles de temps, et enfin par l la distance des deux sections, les volumes en question seront respectivement $\pi r^2 l$ et $\pi(r-\alpha)^2 l$; et comme α est nécessairement très-petit, ce qui permet d'en négliger le carré, la différence de ces volumes se réduira à $2\pi l r \alpha$. Telle est donc la mesure de la quantité de liquide qui, dans un intervalle de temps constant très-court, passe à travers notre section; or la vitesse avec laquelle s'effectue ce passage, est visiblement proportionnelle à la quantité ci-dessus et en raison inverse de l'aire πr^2 de la section; elle est donc proportionnelle au rapport $\frac{2\pi l r \alpha}{\pi r^2} = 2l\frac{\alpha}{r}$, ou simplement, en supposant constante la distance l des deux sections, au rapport $\frac{\alpha}{r}$.

Maintenant, comme la transformation va en s'accélérant, le numérateur α augmente d'abord beaucoup, pendant que le dénominateur r diminue, de sorte que, par cette double raison, la vitesse du passage du liquide à travers notre section commence par croître suivant une loi très-rapide; mais je dis que cette même vitesse finit par devenir sensiblement uniforme. En effet, dans le phénomène de la transformation, les mouvements des molécules liquides consistent surtout en des déplacements des unes par rapport aux autres, puisque la figure ne fait que changer de forme; or, ainsi que je l'ai rappelé souvent à propos des lames, la viscosité oppose à ces déplacements relatifs une résistance qui augmente considérablement avec leur vitesse; on peut donc admettre que, par suite de cette résistance, la vitesse, d'abord rapidement croissante, du passage à travers la section considérée, prend à la fin une valeur à peu près constante, comme cela a lieu à l'égard de toute vitesse accélérée et soumise à des résistances qui augmentent beaucoup avec elle.

Le rapport $\frac{\alpha}{r}$ atteint donc, lorsque le rayon r est suffisamment amoindri, une valeur qui peut être regardée comme ne variant plus ensuite; mais cette constance ne peut avoir lieu que si α, qui représente la vitesse d'amincissement du milieu de l'étranglement, diminue en même temps que le rayon r; ainsi cette vitesse d'amincissement, qui était primitivement très-accélérée, finit par être au contraire retardée. Mais, dans cette phase de la transformation, les sections de l'étranglement plus distantes de celle du milieu ayant moins perdu en diamètre, le mouvement des molécules qui y passent est beaucoup moins entravé par la résistance de la viscosité, et conséquemment, vers la fin du phénomène, pendant que l'amincissement se ralentit au milieu de l'étranglement et dans les portions voisines, il poursuit sa marche accélérée dans les portions plus éloignées; or il résulte évidemment de là que le milieu de la figure doit prendre alors une forme allongée et quasi cylindrique, ou constituer ce que j'ai nommé un filet.

Disons ici que Beer a présenté une explication tout autre de la formation des filets; nous y reviendrons plus loin (§ 423).

§ 377. Un fait curieux, c'est que l'identité entre les figures laminaires et les figures pleines se soutient jusque dans le phénomène particulier que nous venons d'étudier; en d'autres termes, quand une figure laminaire instable se partage spontanément en portions isolées, la séparation de celles-ci est de même accompagnée de la formation des filets, qui, eux aussi, se convertissent en sphérules, et ces filets, ainsi que ces sphérules, sont alors laminaires comme la figure d'où ils proviennent. Par exemple, dans la désunion du caténoïde laminaire d'huile réalisé au sein du liquide alcoolique (§ 222), on distingue parfaitement le filet laminaire et sa transformation en sphérules; avec le caténoïde laminaire de liquide glycérique (§ 111), on ne peut observer le filet, à cause de la rapidité des phénomènes; mais, au moment de la désunion, on voit une sphérule de quelques millimètres de diamètre tomber sur la lame inférieure, et y rebondir pendant quelques instants; cette sphérule se change ensuite en une lentille bi-convexe, laminaire comme elle, enchâssée par son bord dans la lame. De même si, après avoir réalisé, au moyen du liquide glycérique, un onduloïde partiel étranglé ou un onduloïde partiel renflé (§ 113), on continue à élever l'anneau supérieur jusqu'à la rupture de l'équilibre, on voit, à l'instant de la désunion, une sphérule de quelques millimètres de diamètre s'échapper de la figure et voltiger dans l'air, ou tomber sur la bulle qui s'est formée à l'anneau inférieur, selon le plus ou moins de ténuité de la lame qui constitue cette même sphérule.

§ 378. Il est aisé d'étendre à la génération des filets laminaires la théorie exposée plus haut. Dans une masse pleine, les forces qui produisent la transformation émanent de la couche superficielle, et la portion de cette couche qui correspond à un étranglement agit en exprimant, par sa contraction, le liquide qu'elle entoure vers les parties adjacentes de la masse; dans une figure laminaire, les actions émanent des couches superficielles des deux faces de la lame, et ces deux systèmes de forces s'ajoutent l'un à l'autre. Si donc la figure laminaire est formée d'huile au sein du liquide alcoolique, la lame, en se contractant, chasse le liquide alcoolique intérieur de part et d'autre du milieu de l'étranglement; notre théorie reçoit conséquemment son application, et il y a formation d'un filet laminaire. Si la figure laminaire est réalisée dans l'air, par exemple avec de l'eau de savon ou du liquide glycérique, c'est l'air qui est exprimé de l'intérieur de l'étranglement. Dans ce dernier cas, à cause de l'extrême mobilité des molécules des gaz, il semble d'abord qu'on ne peut plus faire intervenir l'influence de la viscosité; mais il faut faire attention que le phénomène s'accomplit avec une rapidité bien plus grande, de sorte que, par cet excès de vitesse, la résistance aux mouvements relatifs des molécules de l'air devient suffisante pour amener le même résultat, c'est-à-dire la naissance d'un filet.

§ 379. Continuons l'étude expérimentale de la transformation spontanée des cylindres en sphères isolées. Tâchons de découvrir la loi suivant laquelle la durée du phénomène varie avec le diamètre du cylindre, et d'obtenir au moins quelques indices relativement à la valeur absolue de cette durée pour un cylindre d'un diamètre donné, formé d'un liquide donné, et placé dans des circonstances données.

On comprend d'abord a priori que, pour un même liquide et les mêmes circonstances extérieures, et en supposant que la longueur du cylindre soit toujours telle que les divisions prennent exactement leur longueur normale (§ 365), la durée du phénomène doit croître avec le diamètre : car plus celui-ci est grand, plus est grande la masse de chacune des divisions, et, d'un autre côté, plus les courbures, d'où dépendent les intensités des forces figuratrices, sont faibles. Il est vrai que la surface de chacune des divisions augmente aussi avec le diamètre du cylindre, et que, par suite, il en est de même du nombre des forces figuratrices élémentaires; mais cette augmentation a lieu dans un moindre rapport que celle de la masse.

Je me suis assuré, à l'aide des cylindres de mercure de $1^{mm},05$ et de $2^{mm},1$ de diamètre (§§ 366 et 369), que la durée du phénomène croît, en effet, avec le diamètre : bien que la transformation de ces cylindres s'effectue très-rapidement, on reconnaît cependant sans peine que la durée relative au plus grand diamètre est supérieure à celle qui se rapporte au plus petit.

Quant à la loi qui régit cette augmentation de durée, il serait sans doute difficile d'en obtenir la détermination expérimentale d'une manière directe, c'est-à-dire en mesurant les temps qu'exigerait l'accomplissement du phénomène à l'égard de deux cylindres assez longs pour qu'ils se convertissent respectivement en plusieurs sphères isolées. On y parviendrait probablement en recourant au procédé indiqué par M. Donny (§ 367) ; mais on peut arriver au même résultat d'une manière plus simple, bien qu'avec certaine restriction dont nous parlerons bientôt, par le moyen de deux cylindres d'huile courts formés entre des disques, cylindres auxquels rien n'empêche de donner des diamètres assez grands pour rendre facile la mesure précise des durées. La transformation d'un cylindre de cette espèce ne produit qu'un seul étranglement et un seul renflement; mais comme, dans la transformation des cylindres assez longs pour fournir plusieurs sphères isolées complètes, les phases par lesquelles passent les étranglements et les renflements sont les mêmes pour tous, il suffit de considérer un seul étranglement et un seul renflement. On comprend que les deux systèmes solides devront avoir des dimensions relatives telles, que le rapport entre la distance des disques et le diamètre de ceux-ci soit le même des deux parts, afin que la similitude existe entre les deux figures liquides à leur origine et dans tous les instants homologues de leurs transformations.

Avant de rendre compte de l'emploi de ces figures d'huile pour la recherche de la loi des durées, nous devons présenter ici plusieurs remarques importantes. Nous n'aurons à faire usage (chap. XI) de la loi dont il s'agit, que dans le cas, d'ailleurs le plus simple, où les cylindres seraient formés dans le vide ou dans l'air, et seraient exempts de toute résistance extérieure, ou, en d'autres termes, libres sur toute leur surface convexe. Or nos cylindres d'huile courts sont formés au sein du liquide alcoolique, et l'on peut se demander si cette circonstance n'influe pas sur le rapport des durées correspondant à un rapport donné entre les diamètres de ces cylindres. D'abord, en effet, une portion plus ou moins grande du liquide alcoolique doit être déplacée par les modifications des figures, de sorte que la masse totale à mouvoir dans une transformation, se compose de la masse d'huile et de cette portion du liquide alcoolique; mais il est clair qu'en vertu de la similitude des deux figures d'huile et de celle de leurs mouvements, les quantités du liquide ambiant respectivement déplacées seront entre elles exactement, ou du moins sensiblement, comme les deux masses d'huile ; de manière que le rapport des deux masses totales ne sera pas altéré par cette circonstance. Il est bien probable, d'après cela, que cette même circonstance n'influera pas non plus sur le rapport des durées ; seulement les valeurs absolues de ces durées seront plus considérables.

D'un autre côté, l'attraction mutuelle des deux liquides en contact diminue les intensités des forces figuratrices ; mais il est aisé de voir que cette diminution n'altére pas le rapport de ces intensités dans les deux figures. En effet, imaginons qu'à un instant homologue des deux transformations, le liquide alcoolique se trouve tout à coup remplacé par de l'huile, et concevons, par la pensée, dans celle-ci, les surfaces des deux figures, telles qu'elles étaient à cet instant. Alors les forces figuratrices seront complétement détruites par l'attraction de l'huile extérieure à ces surfaces, ou, en d'autres termes, l'attraction extérieure sera, en chaque point, égale et opposée à la force figuratrice intérieure. Si maintenant nous rétablissons le liquide alcoolique, les intensités des attractions extérieures changeront, mais elles conserveront évidemment entre elles les mêmes rapports ; d'où il suit que celles qui correspondent à deux points homologues pris sur les deux figures, seront encore entre elles comme les forces figuratrices intérieures partant de ces deux points ; de sorte qu'en définitive, les résultantes respectives des actions extérieure et intérieure en ces deux mêmes points, seront entre elles dans le même rapport que les deux forces intérieures seules. Ainsi les attractions exercées sur l'huile par le liquide alcoolique ambiant diminueront bien les intensités absolues des forces figuratrices, mais elles ne changeront pas les rapports de ces intensités, et il est à croire, par conséquent, qu'elles n'auront aucune influence sur le rapport des durées. Mais il est clair que cette cause augmentera encore de beaucoup les valeurs absolues de celles-ci.

Par les deux raisons que nous venons d'exposer, la présence du liquide alcoolique augmentera donc considérablement les valeurs absolues des deux durées ; mais on peut admettre qu'elle n'altérera pas le rapport de ces valeurs, de sorte que ce rapport sera le même que si les phénomènes s'opéraient dans le vide ou dans l'air. Nous considérerons, par conséquent, la loi que nous déduirons de nos expériences sur les cylindres d'huile courts, comme indépendante de la présence du liquide alcoolique ambiant, et c'est ce qui se trouvera appuyé par la nature même de cette loi.

Cependant la transformation de nos cylindres courts présente une particularité qui entraîne une restriction. Les deux masses finales dans lesquelles se résout un semblable cylindre étant inégales, la plus petite atteint sa forme d'équilibre notablement avant l'autre, de sorte que la durée du phénomène n'est pas unique. Il résulte de là que nous ne pourrons compter la durée, que jusqu'à l'instant de la rupture du filet; et, par conséquent, le rapport que nous obtiendrons ainsi pour deux cylindres, ne sera que celui des durées de deux portions homologues des transformations totales. Du reste, le rapport de ces durées partielles est précisément celui dont nous aurons à faire usage plus loin.

§ 380. J'ai exécuté les expériences dont il s'agit, en employant deux systèmes de disques, dont les dimensions respectives étaient entre elles comme 1 à 2 ; dans le premier, les disques avaient un diamètre de 15^{mm} et étaient séparés par une distance de 54^{mm}, et, dans le second, le diamètre était de 30^{mm} et la distance de 108^{mm}. Les cylindres formés respectivement dans ces deux systèmes étaient donc semblables entre eux, et, comme on devait s'y attendre, la similitude entre les deux figures se maintenait exactement, pour autant que l'œil pouvait en juger, dans toutes les phases de leurs transformations.

Il arrivait quelquefois que le cylindre, en apparence bien formé, ne montrait aucune persistance, et commençait immédiatement à s'altérer ; cette circonstance devant être attribuée à un petit reste d'irrégularité de la figure, on rétablissait aussitôt la forme cylindrique[1], et l'on ne comptait le temps que lorsque la figure paraissait se maintenir sous cette forme pendant quelques instants. Mais alors encore se présentait parfois une autre anomalie, qui consistait dans la formation simultanée de deux étranglements comprenant entre eux un renflement ; cette modification s'arrêtait après avoir atteint un degré assez peu prononcé d'ailleurs, et la figure semblait demeurer dans le même état pendant un temps notable ; puis l'un des étranglements se prononçait peu à peu davantage, tandis que l'autre s'effaçait, et la transformation continuait ensuite à la manière ordinaire. Comme cette particularité constituait une exception à la marche régulière du phénomène, on cessait de compter dès qu'elle se montrait, et l'on rétablissait encore la forme cylindrique. On ne continuait définitivement à compter le temps, que dans les cas où, après quelque persistance de la forme cylindrique, il ne se produisait qu'un seul étranglement.

Pour chacun des deux cylindres, on a répété vingt fois

(1) Voir la note du § 359.

l'expérience, afin d'obtenir un résultat moyen. Lorsqu'une transformation était opérée, on réunissait en une seule les deux masses auxquelles elle avait donné lieu, et l'on reformait le cylindre (1), pour passer à une nouvelle mesure du temps.

Voici les nombres de secondes obtenus ; chacun d'eux exprime le temps écoulé depuis l'instant de la formation du cylindre jusqu'à celui de la rupture du filet. Ces temps étaient comptés à l'aide d'une montre battant les cinquièmes de seconde.

	CYLINDRE DE 15mm DE DIAMÈTRE.		CYLINDRE DE 30mm DE DIAMÈTRE.
	25″0		59″6
	26,6		73,0
	28,0		57,0
	30,0		61,0
	24,8		67,8
	35,2		60,0
	27,0		63,6
	30,0		54,2
	30,4		61,0
	29,8		52,6
	36,4		51,6
	32,0		68,0
	30,4		73,6
	24,6		61,8
	32,6		53,0
	33,8		58,0
	33,8		63,8
	20,2		60,0
	28,6		52,6
	32,6		55,2
Moyenne. .	29″59	Moyenne. .	60″38

(1) On étirait, à cet effet, la grosse masse vers la petite, au moyen de l'anneau dont j'ai parlé dans le § 46. Mais il fallait empêcher que l'anneau, en quittant la figure liquide, n'entraînât avec lui une quantité sensible d'huile ; pour cela, au lieu de faire adhérer à la grosse masse la totalité de

On voit que les nombres relatifs à un même diamètre ne s'écartent pas assez les uns des autres pour qu'on ne puisse regarder le rapport des deux moyennes comme s'approchant beaucoup du rapport véritable des durées. Or le rapport de ces deux moyennes est 2,04, c'est-à-dire presque exactement égal à celui des deux diamètres. D'ailleurs, il est évident que, pour chacun de ces derniers, le plus grand des nombres obtenus doit correspondre au cas où le cylindre était formé de la manière la plus parfaite, et, par conséquent, il est probable que le rapport de ces deux plus grands nombres s'approche aussi beaucoup du rapport véritable des durées. Or ces deux nombres sont, d'une part 36,4, et, de l'autre, 73,6, et leur rapport est 2,02, nombre qui diffère encore moins de 2, ou du rapport des diamètres.

Nous pouvons donc admettre que les durées relatives à ces deux cylindres sont entre elles comme les diamètres de ces mêmes cylindres; d'où nous déduirons cette loi, que la durée partielle de la transformation d'un semblable cylindre est proportionnelle au diamètre de celui-ci.

J'ai dit (§ précéd.) que la loi ainsi obtenue fournirait par elle-même un nouveau motif de croire qu'elle ne changerait pas si nos cylindres d'huile courts étaient réalisés dans le vide ou dans l'air. En effet, la proportionnalité au diamètre est la loi la plus simple possible,

l'anneau, on laissait libre une petite portion de celui-ci, et comme alors son action était insuffisante pour étendre la grosse masse jusqu'à l'autre, on y aidait en poussant légèrement l'huile avec l'extrémite du bec de la seringue. Lorsqu'après la réunion des deux masses on retirait l'anneau, il n'abandonnait dans le liquide alcoolique qu'une sphérule fort petite, que d'ailleurs on réunissait ensuite au reste de l'huile à l'aide de l'anneau lui-même, ainsi que la plus grosse des sphérules dues à la transformation du filet.

et, d'autre part, les circonstances dans lesquelles le phénomène s'opère sont moins simples dans le cas de la présence du liquide alcoolique qu'elles ne le seraient dans celui de son absence; par conséquent, si la loi changeait du premier au second, il s'ensuivrait qu'une simplification dans les circonstances amènerait, au contraire, une complication dans la loi, ce qui est bien peu vraisemblable.

Nous pouvons donc, je pense, légitimement généraliser la loi ci-dessus d'après l'ensemble des remarques du paragraphe précédent, et en tirer la conclusion qui suit :

Si l'on suppose un cylindre liquide formé dans le vide ou dans l'air, assez long pour fournir plusieurs sphères, libre sur toute sa surface convexe, et d'une longueur telle, que les divisions prennent exactement leur longueur normale, le temps qui s'écoulera depuis l'origine de la transformation jusqu'à l'instant de la rupture des filets sera exactement ou sensiblement proportionnel au diamètre de ce cylindre.

§ 381. Occupons-nous maintenant de la valeur absolue du temps dont il s'agit, pour un diamètre donné, le cylindre étant toujours supposé réalisé dans le vide ou dans l'air, assez long pour fournir plusieurs sphères, libre sur toute sa surface convexe, et d'une longueur telle que ses divisions prennent leur longueur normale.

Il est clair que cette valeur absolue doit varier avec la nature du liquide : car elle dépend évidemment de la densité de celui-ci, de l'intensité de ses forces figuratrices, et enfin de ses viscosités.

Les expériences que nous venons de rapporter ne donnent à l'égard de l'huile qu'une limite supérieure fort éloignée : c'est ce qui résulte d'abord des deux causes que nous avons signalées dans le § 379 et qui sont dues à la présence du liquide alcoolique ; mais à ces deux causes s'en joint une troisième que nous devons faire connaître. Si l'on imagine un cylindre d'huile formé dans les conditions ci-dessus, la somme des longueurs d'un étranglement et d'un renflement sera probablement plus considérable à l'égard de ce cylindre qu'à l'égard de nos cylindres d'huile courts ayant le même diamètre : car, à cause de la grande viscosité de l'huile, cette somme doit sans doute surpasser plus que dans nos cylindres d'huile courts la longueur qui correspond à la limite de la stabilité. Or on peut poser en principe, que, toutes choses égales d'ailleurs, une augmentation dans la somme des longueurs d'un étranglement et d'un renflement tend à rendre la transformation plus rapide, et, par conséquent, à raccourcir les durées totale et partielle du phénomène. En effet, pour un diamètre donné, plus la somme dont il s'agit s'éloigne de la longueur qui correspondrait à la limite de la stabilité, plus les forces qui produisent la transformation doivent agir avec énergie; d'ailleurs, immédiatement au-dessous de la limite de la stabilité la transformation ne s'effectuant plus, on peut alors considérer la durée du phénomène comme infinie, d'où il suit que lorsqu'on passe au delà de cette limite, la durée passe d'une valeur infinie à une valeur finie, et que, par conséquent, elle doit décroître rapidement à partir de cette même limite; enfin, c'est aussi ce que confirment les résultats de l'expérience comme nous le montrerons plus loin § 407. Ainsi, lors même qu'il serait possible de former dans le vide ou dans l'air l'un de nos cylindres d'huile courts, et d'éliminer, par conséquent, les deux causes de retard dues à la présence du liquide alcoolique, la durée relative à ce cylindre surpasserait encore celle qui se rapporterait à un cylindre d'huile de même diamètre formé dans les conditions que nous avons supposées.

§ 382. Mais si, en comptant la durée absolue dans le cas de l'un de nos cylindres d'huile courts, nous n'obtenons à l'égard de ce liquide qu'une limite supérieure beaucoup trop élevée, le cylindre de mercure du § 369, cylindre qui est formé dans l'air, et dont la longueur est suffisante par rapport au diamètre pour que les divisions aient exactement ou à fort peu près leur longueur normale, nous fournira, au contraire, à l'égard de ce dernier liquide, une limite inférieure probablement plus approchée.

D'abord, dans le cas de ce cylindre, dont le diamètre était, comme nous l'avons dit, de $2^{mm},1$, la transformation ne s'effectue pas en un temps tellement court, que l'on ne puisse estimer avec quelque exactitude la durée totale du phénomène ; je dis la durée totale, parce que dans une transformation aussi rapide, il serait bien difficile de saisir l'instant de la rupture des filets. Pour approcher autant que possible de la valeur de cette durée totale, j'ai eu recours au procédé suivant.

On a réglé, par des épreuves successives, les battements d'un métronome de telle manière qu'en soulevant avec rapidité, à l'instant précis d'un battement, le système des bandes de verre appartenant à l'appareil qui sert à former le cylindre, le battement suivant parût coïncider avec la terminaison de la transformation ; puis, après s'être assuré encore plusieurs fois que cette coïncidence paraissait bien exacte, on a déterminé la durée de l'intervalle entre deux battements, en comptant les oscillations exécutées par l'instrument pendant deux minutes, et divisant ce temps par le nombre des oscillations. J'ai trouvé ainsi, pour l'intervalle dont il s'agit, la valeur 0″,39. La durée totale de la transformation de notre cylindre de mercure peut donc être évaluée approximativement à 0″,39, ou, plus simplement, à 0″,4.

Mais ce cylindre n'est pas libre sur toute sa surface convexe, et son contact avec la plaque de verre doit influer sur la durée, tant directement que par l'accroissement qu'il détermine dans la longueur des divisions. Examinons donc sous ce double point de vue l'influence dont il s'agit.

L'action directe du contact avec la plaque est sans doute bien faible : car, dès que la transformation commence, le liquide doit se détacher du verre dans tous les intervalles entre les parties renflées, de manière à ne plus toucher le plan solide que par une série de très-petites surfaces appartenant à ces parties renflées; par conséquent, si l'action directe du contact de la plaque était seule éliminée, c'est-à-dire si l'on pouvait faire en sorte que le cylindre fût libre sur toute sa surface convexe, mais que cependant les divisions qui s'y forment prissent la même longueur qu'auparavant, la durée totale se trouverait à peine diminuée.

Reste donc l'effet de l'allongement des divisions. La longueur des divisions de notre cylindre est égale à 6,35 fois le diamètre (§ 370), tandis que, dans l'hypothèse d'une liberté complète de la surface convexe, cette longueur serait très-probablement moindre que 4 fois le diamètre (§ 373); or, en vertu du principe établi dans le paragraphe précédent, cette augmentation dans la longueur des divisions entraîne nécessairement une diminution dans la durée, diminution d'autant plus considérable, qu'elle a lieu dans le voisinage de la limite de la stabilité; par conséquent, si l'on pouvait faire en sorte que l'allongement dont il s'agit n'existât pas, la durée totale se trouverait très-notablement accrue.

Ainsi, la suppression de l'action directe du contact de la plaque ne produirait dans la durée totale qu'une diminution très-légère; et l'annulation de l'allongement des divisions déterminerait, au contraire, un accroissement très-notable dans cette même durée; si donc ces deux influences étaient éliminées à la fois, ou, en d'autres termes, si notre cylindre était libre sur toute sa surface convexe, la durée totale de sa transformation serait très-notablement supérieure au résultat direct de l'observation.

Maintenant, la quantité que nous avons à considérer, c'est la durée partielle, et non la durée totale; mais, dans les mêmes circonstances, la première doit être peu inférieure à la seconde : car lorsque les filets vont se rompre, les masses entre lesquelles ils s'étendent approchent déjà de la forme sphérique; par conséquent, en vertu de la conclusion ci-dessus obtenue, nous devons admettre que la durée partielle dont nous nous occupons, c'est-à-dire celle qui se rapporterait au cas d'une liberté complète de la surface convexe du cylindre, excèderait encore notablement la durée totale observée, savoir 0″,4.

En partant de cette valeur 0″,4 comme constituant la limite inférieure correspondante à un diamètre de $2^{mm},1$, la loi de la proportionnalité de la durée partielle au diamètre donnera immédiatement la limite inférieure correspondante à un autre diamètre quelconque : on trouvera, par exemple, que, pour dix millimètres, cette limite serait de $\frac{0'',4 \times 10}{2,1} = 1'',9$, ou plus simplement de 2″.

Si donc on suppose un cylindre de mercure d'un centimètre de diamètre, formé dans le vide ou dans l'air, assez long pour fournir plusieurs sphères, libre sur toute sa surface convexe, et d'une longueur telle que ses divisions prennent leur longueur normale, le temps qui s'écoulera depuis l'origine de la transformation de ce cylindre jusqu'à l'instant de la rupture des filets, surpassera notablement deux secondes.

§ 383. Revenons, pour un instant, à notre théorie de la génération des filets (§§ 376 à 378). Une conséquence immédiate de cette théorie, c'est que plus est grande la vitesse avec laquelle un étranglement s'approfondit, moins le filet doit être mince; or, ainsi qu'on l'a vu plus haut, un étranglement doit s'approfondir d'autant plus vite qu'il est plus allongé; si donc, par suite de circonstances particulières, un étranglement appartenant soit à un cylindre, soit à une autre figure, est très-allongé, le filet auquel il donnera lieu sera épais, et la principale des sphérules résultant de sa conversion pourra ne pas différer beaucoup en diamètre des deux masses extrêmes; il est même possible que, vu sa longueur, il fournisse plus d'une grosse sphérule; nous verrons un exemple remarquable de ces cas. Si, au contraire, un étranglement est très-court, le filet sera très-délié, et conséquemment la sphérule très-petite, ou même il ne se formera ni filet ni sphérule; une expérience de M. Tait (§ 345) offre un exemple de ce dernier cas, et nous en indiquerons un autre au § 504.

En outre, un filet se transformant dès que le rapport entre sa longueur et son diamètre atteint la limite de stabilité des cylindres, il en résulte qu'un filet très-court devra aussi être très-mince pour se transformer, et que si, au moment où il vient d'être développé, il n'a pas un diamètre assez petit, il ne se transformera qu'après s'être suffisamment aminci; tandis qu'un filet très-long, filet qui, d'après ce qui précède, est originairement épais, pourra se transformer en cet état. De là donc une seconde raison de la différence des résultats fournis respectivement par un étranglement court et par un étranglement allongé.

§ 384. Il n'est pas inutile de présenter ici, en résumé, l'ensemble des faits et des lois que les expériences décrites dans ce qui précède nous ont conduit à établir à l'égard des cylindres liquides instables.

1° Lorsque un cylindre liquide est formé entre deux bases solides, si le rapport de sa longueur à son diamètre surpasse une certaine limite dont la valeur exacte est comprise entre 3 et 3,6, le cylindre constitue une figure d'équilibre instable.

La valeur exacte dont il s'agit est ce qne nous nommons *la limite de la stabilité du cylindre*.

2° Si le cylindre a une longueur considérable par rapport à son diamètre, il se convertit spontanément, par la rupture de l'équilibre, en une série de sphères isolées, égales en diamètre, également espacées, ayant leurs centres sur la droite qui formait l'axe du cylindre, et dans les intervalles desquelles sont rangées, suivant ce même axe, des sphérules de différents diamètres. Seulement chacune des bases solides retient adhérente à sa surface une portion de sphère.

3° La marche du phénomène est la suivante : le cylindre commence par se renfler graduellement sur des portions de sa longueur situées à égale distance les unes des autres, tandis qu'il s'amincit dans les portions intermédiaires, et la longueur des renflements ainsi formés est égale ou à fort peu près à celle des étranglements ; ces modifications continuent à se prononcer de plus en plus, en s'effectuant avec une vitesse accélérée, jusqu'à ce que les milieux des étranglements soient devenus très-minces ; alors, à partir de chacun de ces milieux, le liquide se retire rapidement dans les deux sens, mais en laissant encore les masses réunies deux à deux par un filet sensiblement cylindrique ; puis celui-ci éprouve les mêmes modifications que le cylindre ; seulement il ne s'y forme en général que deux étranglements, qui comprennent, par conséquent, entre eux un renflement ; chacun de ces petits étranglements se convertit à son tour en un filet plus délié, qui se brise en deux points et donne naissance à une sphérule isolée très-petite, tandis que le renflement ci-dessus se transforme en une sphérule plus grande ; enfin, après la rupture de ces derniers filets, les grosses masses prennent complétement la forme sphérique. Tous ces phénomènes s'accomplissent d'une manière symétrique par rapport à l'axe, de sorte que, pendant leur durée, la figure ne cesse pas d'être de révolution.

4° Nous nommons *divisions* d'un cylindre liquide, les portions de ce cylindre dont chacune doit fournir une sphère, soit que nous considérions par la pensée ces portions dans le cylindre même, avant qu'elles aient commencé à se dessiner, soit que nous les prenions pendant la transformation, c'est-à-dire pendant que chacune d'elles se modifie pour arriver à la forme sphérique. La longueur d'une division mesure, par conséquent, la distance constante qui, pendant la transformation, se trouve comprise entre les cercles de gorge de deux étranglements voisins.

Nous nommons, en outre, *longueur normale des divisions*, celle que prendraient les divisions si le cylindre auquel elles appartiennent avait une longueur infinie.

Dans le cas d'un cylindre limité par des bases solides, les divisions prennent aussi la longueur normale lorsque la longueur du cylindre est égale au produit de cette même longueur normale par un nombre entier ou bien par un nombre entier plus un demi.

Alors, si le second facteur est un nombre entier, la transformation se dispose de telle manière, que, pendant son accomplissement, la figure se termine d'un côté par un étranglement et de l'autre par un renflement; si le second facteur est composé d'un nombre entier plus un demi, la figure se termine de chaque côté par un renflement.

Quand la longueur du cylindre ne remplit ni l'une ni l'autre de ces conditions, les divisions prennent la longueur la plus approchée possible de la longueur normale, et la transformation adopte celle des deux dispositions ci-dessus la plus convenable pour atteindre ce but.

5° Pour un cylindre d'un diamètre donné, la longueur normale des divisions croît avec les résistances qui gênent la transformation; elle varie donc, mais sans doute assez faiblement, avec la nature du liquide, les viscosités, tant intérieure que superficielle, de celui-ci constituant des résistances. S'il y a une résistance extérieure, telle que le contact de la surface convexe du cylindre avec un plan solide, cette résistance augmente conséquemment aussi la longueur normale des divisions. Dans tous les énoncés qui suivent, nous prendrons le cas le plus simple, savoir celui de l'absence de toute résistance extérieure; en d'autres termes, nous supposerons toujours les cylindres dans le vide ou dans l'air, et libres sur toute leur surface convexe.

6° Deux cylindres différents en diamètre, mais formés du même liquide, et ayant des longueurs telles que les divisions prennent dans chacun d'eux leur longueur normale, se divisent d'une manière semblable, c'est-à-dire que les longueurs normales respectives des divisions sont entre elles comme les diamètres de ces cylindres.

En d'autres termes, la nature du liquide ne changeant pas, la longueur normale des divisions d'un cylindre est proportionnelle au diamètre de celui-ci.

Il en est de même, par conséquent, du diamètre des sphères isolées dans lesquelles se convertissent les divisions normales, et de la longueur des intervalles qui séparent ces sphères.

7° Par suite des viscosités intérieure et superficielle, le rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre du cylindre surpasse toujours la limite de la stabilité. Il se réduirait sans doute à cette limite même si le liquide était exempt de toute viscosité.

8° On peut adopter 4 comme valeur moyenne de ce rapport dans les différents liquides. D'après cela, on a, pour la valeur approximative probable du rapport entre le diamètre des sphères isolées qui résultent de la transformation et le diamètre du cylindre, le nombre 1,82; et, pour celle du rapport entre la distance de deux sphères voisines et ce même diamètre, le nombre 2,18.

9° Le temps qui s'écoule depuis l'origine de la transformation jusqu'à l'instant de la rupture des filets, est exactement ou sensiblement proportionnel au diamètre du cylindre.

10° Pour un même diamètre, et les divisions ayant toujours leur longueur normale, la valeur absolue du temps dont il s'agit varie avec la nature du liquide.

11° Dans le cas du mercure, et pour un diamètre d'un centimètre, cette valeur absolue est notablement supérieure à deux secondes.

12° Lorsque un cylindre est formé entre deux bases solides suffisamment rapprochées pour que le rapport de la longueur du cylindre au diamètre soit compris entre une fois et une fois et demie la limite de la stabilité, la transformation ne produit qu'un seul étranglement et un seul renflement; on n'obtient alors pour résultat final, que deux portions de sphères inégales en volume et en courbure, respectivement adhérentes aux bases solides, plus des sphérules interposées.

§ 385. Nous venons d'étudier expérimentalement ce qui concerne la stabilité des cylindres liquides; passons au caténoïde.

On a vu (§ 60) que le caténoïde partiel de hauteur maxima, quand on le réalise, au sein du liquide alcoolique, avec une masse d'huile pleine, est toujours parfaitement stable, et que cependant on doit le regarder comme étant à sa limite de stabilité. Nous allons, comme je l'ai annoncé (§ 111), éclaircir cette difficulté.

Pour cela, commençons par décrire, avec leurs curieuses particularités, les expériences relatives à la recherche de ce caténoïde maximum. Rappelons d'abord ce que nous avons déjà dit (§ 62), savoir : que le diamètre extérieur des anneaux était de 71^{mm}; que, dans toutes les expériences dont il s'agit, après avoir formé un cylindre entre ces anneaux, on enlevait graduellement de l'huile à la masse; enfin qu'on interrompait de temps à autre l'exhaustion, pour observer la figure. Voici maintenant les résultats :

1re Expérience. Distance des anneaux, 55^{mm}. On réduit par degrés à une fraction de millimètre la flèche des calottes sphériques qui constituent les bases; alors, pendant une interruption de l'épuisement, un phénomène singulier se produit : la figure éprouve une petite modification spontanée; la convexité des bases augmente rapidement, jusqu'à ce que la flèche reprenne une valeur d'environ $2^{mm},5$, et par conséquent l'étranglement formé entre les anneaux s'amincit quelque peu, puis tout demeure parfaitement stationnaire. En absorbant encore de l'huile avec ménagement, la flèche s'accroît jusqu'à 3^{mm} à peu près; enfin, à la suite d'une nouvelle absorption, la figure se désunit à la manière ordinaire par le milieu de l'étranglement.

2^{me} Expérience. Distance des anneaux, 49^{mm}. Les bases finissent par perdre sensiblement toute courbure, puis il y a, comme précédemment, transformation spontanée : les bases redeviennent légèrement convexes, avec une flèche d'environ 1^{mm}. Une nouvelle absorption amène la désunion.

3^{me} Expérience. Distance des anneaux, 47^{mm}. Les bases paraissent encore s'aplanir tout à fait, et la figure persiste dans cet état. Des absorptions ultérieures semblent d'abord n'avoir d'autre effet que d'approfondir l'étranglement, sans que les bases cessent de se montrer planes; puis une petite convexité se reforme, mais non plus spontanément : elle naît et augmente au fur et à mesure que l'on épuise; lorsque la flèche est à peu près de $1^{mm},5$, la désunion s'effectue.

4^{me} Expérience. Distance des anneaux, 45^{mm}. Les bases deviennent d'abord planes, puis légèrement concaves. La flèche de cette concavité croît jusqu'à 2^{mm} approximativement; puis on observe de nouveau une transformation spontanée : la concavité se change en une convexité, dont la flèche est de près d'un millimètre. L'action de la seringue détermine ensuite la désunion.

5^{me} Expérience. Distance des anneaux, 43^{mm}. Les bases sont rendues planes, puis concaves, et la flèche de la concavité atteint graduellement 4^{mm} ou 5^{mm}; enfin la figure se désunit.

§ 386. Voyons ce que nous apprennent ces expériences. En premier lieu, il n'est pas facile, remarquons-le, de juger du point précis où les bases de la figure sont rendues planes, une courbure extrêmement faible échappant à la vue. De là naît quelque incertitude dans la détermination de la hauteur limite du caténoïde; heureusement les particularités que nous avons signalées fournissent un moyen d'appréciation plus exact.

Dans la quatrième expérience, on passe nécessairement par des bases planes, puisque la courbure, de convexe qu'elle était, devient graduellement concave par le progrès de l'absorption du liquide; mais en est-il de même dans la deuxième et dans la troisième, où l'on a paru arriver aussi à des plans? Essayons d'éclairer cette question. La première, la deuxième et la quatrième expérience ont cela de commun qu'il s'y est produit une petite modification ou transformation spontanée de la figure, tandis que dans la troisième ce phénomène n'a pas eu lieu; et cette modification a été en décroissant de la première à la deuxième, pour disparaître dans la troisième et reparaître dans la quatrième. On doit croire, d'après cela, que la troisième expérience forme une sorte de passage en deçà et au delà duquel se manifestent les petites transformations spontanées; mais l'effet s'est montré, dans la première expérience, lorsque les bases avaient encore une courbure visible, et, dans la quatrième, lorsqu'elles en avaient pris une en sens inverse; il est donc bien probable que, dans la deuxième, au moment où l'on a vu naître la transformation spontanée, les bases conservaient encore une courbure réelle, quoique trop faible pour être distinguée, et que c'est seulement dans la troisième, où la distance des anneaux était de 47 millimètres, que l'on a atteint des bases tout à fait planes. Si, dans cette troisième expérience, les bases jugées planes ont paru ne commencer à perdre cet état qu'après l'absorption d'une quantité très-notable de liquide, cela tient évidemment à la difficulté mentionnée plus haut de distinguer nettement le point où la courbure est annulée.

Ainsi, avec nos anneaux de 71 millimètres de diamètre, on peut admettre que la distance de 47 millimètres diffère très-peu de celle pour laquelle on commence à obtenir des bases rigoureusement planes, et 47 est sensiblement les $\frac{2}{3}$ de 71 ; c'est de cette manière qu'à l'aide de l'expérience seule effectuée sur un caténoïde plein, j'ai trouvé $\frac{2}{3}$ pour la valeur très-approchée du rapport entre la hauteur du caténoïde limite et le diamètre des bases.

§ 387. En second lieu, appelons l'attention sur les petites transformations spontanées considérées en elles-mêmes. Jusqu'à présent, quand nous voyions une de nos figures liquides se transformer, et passer ainsi d'un équilibre instable à un équilibre stable, l'altération était profonde, la masse se séparait en deux ou plusieurs parties, et le résultat final du phénomène se composait toujours de sphères ou de portions de sphères; ici rien de semblable : l'altération est petite, la masse ne se désunit pas, et le résultat final est une figure qui s'éloigne peu de la première, du moins dans la portion réalisée, et qui peut être de la même nature. Dans la première expérience, par exemple, un onduloïde partiel instable se transforme en un autre onduloïde peu différent, et il en est sans doute de même dans la deuxième.

En outre, ce qui est plus remarquable encore, la comparaison des deux premières expériences semble indiquer que l'onduloïde instable et l'onduloïde stable dans lequel il se convertit se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre à mesure que la distance des anneaux est plus voisine de la hauteur maxima du caténoide.

Ces faits nous donnent la clef de la difficulté relative à la stabilité du caténoïde limite plein. Lorsque, les anneaux étant à la distance qui correspond à ce caténoïde et un cylindre étant formé entre eux, on fait agir la petite seringue, la figure devient d'abord, nous le savons, un onduloïde qui, en variant par suite de l'absorption, tend progressivement vers le caténoïde; mais la troisième expérience nous montre, de plus, que si, après avoir atteint cette limite, on continue l'opération, la figure redevient insensiblement un onduloïde qui, au fur et à mesure de l'épuisement, s'éloigne de ce même caténoïde. Si donc le caténoïde partiel de plus grande hauteur constitue le passage entre les caténoïdes partiels stables et les caténoïdes partiels instables, il constitue, d'autre part, le passage entre une suite continue d'onduloïdes stables et une autre suite continue d'onduloïdes également stables. Telle est évidemment la raison de la stabilité prononcée du caténoïde partiel de plus grande hauteur réalisé à l'état plein; aussi, comme nous l'avons vu (§§ 111 et 222), quand on réalise le caténoïde à l'état laminaire, et qu'ainsi on rend impossible la formation de toute autre figure, il perd sa stabilité dès qu'on lui donne la hauteur maxima.

Cette explication laisse cependant encore quelque obscurité sur l'idée d'une figure à la fois très-stable et à sa limite de stabilité; je vais donc la rendre plus complète. Ainsi que je viens de le faire remarquer, il peut arriver, dans certains cas, que la figure stable vers laquelle marche une figure instable qui se déforme spontanément, soit de plus en plus rapprochée de celle-ci à mesure qu'on diminue la distance des bases, et se confonde enfin avec cette figure instable pour une valeur déterminée de la distance en question, de manière qu'alors la figure est nécessairement stable; mais elle est réellement à sa limite de stabilité, en ce sens que si l'on essaie de la réaliser sur une portion plus étendue de sa ligne méridienne, elle ne se maintiendra pas. Seulement la nouvelle forme qu'elle prendra différera d'autant moins de la première que celle-ci dépassera moins la limite, en sorte que si l'on a été à peine au delà de cette limite, le changement de forme sera très-minime.

Tel est sans doute le cas du caténoïde; si, avec une masse pleine, on parvenait à en réaliser un dont la chaînette méridienne s'étendît au delà des points correspondants à la hauteur maxima, il constituerait le plus rentré des deux caténoïdes possibles entre les mêmes bases, et conséquemment il serait instable (§§ 58 et 60); et l'on peut conclure de la 4^{me} et de la 5^{me} expérience du § 385, que sa déformation spontanée le convertirait en un nodoïde ou en un onduloïde, mais ce changement de forme serait d'autant plus petit que le caténoïde excèderait moins la limite en question; enfin, s'il est à cette limite même, il n'y aura pas de changement du tout, et la figure sera stable. Nous verrons ci-après un second exemple du même genre.

§ 388. Arrivons à l'onduloïde. Les conditions de stabilité de cette figure sont essentiellement différentes suivant que son milieu est occupé par un étranglement ou par un renflement.

Dans le premier cas, la limite de stabilité n'a rien d'absolu : quand le rapport entre la distance et le diamètre des bases est assez grand, et que, par l'exhaustion graduelle de la masse, on approche du point où la figure se désunirait spontanément, celle-ci présente (§ 55), outre l'étranglement, deux portions adjacentes de renflements ; dans ce cas donc la ligne méridienne de l'onduloïde partiel à sa limite de stabilité s'étend beaucoup au delà des deux points d'inflexion ; mais il n'en est plus de même pour un intervalle moindre des bases, comme dans les onduloïdes voisins du caténoïde limite ; dans ces derniers, la ligne méridienne est loin d'atteindre les points d'inflexion ; en effet, le caténoïde peut (§ 61) être considéré comme un onduloïde dans lequel les points d'inflexion de la ligne méridienne sont situés à l'infini, et conséquemment, dans un onduloïde partiel très-rapproché du caténoïde limite, onduloïde qui, d'après les expériences du § 385, est lui-même très-près de sa limite de stabilité, les points d'inflexion doivent être situés fort loin au delà des bases de la figure.

Heureusement les choses sont toutes différentes dans le second cas, c'est-à-dire pour un onduloïde partiel dont le milieu est un renflement : alors la limite de la stabilité paraît pouvoir s'exprimer d'une manière très-simple et toujours la même ; en effet, l'expérience conduit (§ 52) à admettre que la figure liquide est à sa limite de stabilité lorsqu'elle se termine aux cercles de gorge de deux étranglements consécutifs, ou, en d'autres termes, lorsqu'elle est exactement composée d'un renflement entre deux demi-étranglements. Nous reviendrons sur ce point (§ 409).

§ 389. Reste encore, quant aux figures d'équilibre de révolution, ce qui se rapporte à la stabilité du nodoïde. Mes procédés réalisent, on l'a vu, soit la portion engendrée par une partie ou par la totalité d'un nœud de la ligne méridienne (§§ 63 à 68), soit la portion engendrée par un arc de cette ligne tournant sa convexité vers l'extérieur (§ 71). Nous aurions donc à chercher la limite de la stabilité dans ces deux cas de la figure partielle.

Dans le premier, l'expérience nous a montré (§ 65) la stabilité s'étendant au moins depuis la circonférence engendrée par le sommet du nœud jusqu'aux deux circonférences où les éléments sont perpendiculaires à l'axe de révolution ; cependant il y a nécessairement une catégorie de nœuds pour lesquels la stabilité s'arrête en deçà des dernières circonférences ainsi caractérisées. En effet, concevons un nodoïde très-voisin du caténoïde (§ 77), et considérons en particulier l'un des nœuds de sa ligne méridienne; ce nœud sera, nous le savons, très-allongé, de sorte que les points où les tangentes sont perpendiculaires à l'axe de révolution se trouveront à une distance de celui-ci très-grande par rapport à celle du sommet du nœud et par rapport à l'intervalle compris entre eux. Si donc on pouvait réaliser entre deux disques la portion de figure engendrée par la partie d'un semblable nœud allant du sommet jusqu'aux points en question, ces disques seraient très-rapprochés relativement à leur rayon, et la figure étranglée pénètrerait fort avant dans leur intervalle. Mais, entre deux disques ainsi placés, mes procédés ne donnent jamais qu'un étranglement dont la ligne méridienne diffère peu d'une demi-circonférence, comme le montrent les *fig.* 36 et 37 (§ 65). Entre deux disques suffisamment rapprochés, il y a conséquemment deux figures étranglées théoriquement possibles, partant l'une et l'autre des bords des disques où leurs lignes méridiennes respectives ont leurs éléments couchés sur les rayons de ces disques, et pénétrant inégalement entre ces mêmes disques; or, comme la moins rentrée est toujours la seule qui se réalise, j'en conclus que la plus rentrée serait instable, c'est-à-dire que, pour celle-ci, la stabilité cesse en deçà des circonférences où les éléments sont perpendiculaires à l'axe.

D'après cela, on doit, me semble-t-il, admettre comme très-probable ce qui suit :

1° Dans la figure la moins rentrée, la limite de la stabilité est au delà des circonférences situées aux bords des disques, de sorte que, pour réaliser cette figure jusque près de sa limite, il faut un procédé différent. Celui du § 67 permet de réaliser, en relief, la portion engendrée par la totalité d'un nœud; à la vérité, la figure n'est pas stable, mais elle persiste assez longtemps pour qu'on puisse en conclure que, si elle n'est pas à sa limite de stabilité, elle en est du moins très-voisine : il n'est pas douteux que si, au lieu d'un anneau en simple fil de fer, on employait une bande de fer peu large et courbée cylindriquement, de manière que la ligne méridienne de la figure liquide n'atteignît pas la pointe du nœud, bien que s'en rapprochant, cette figure, qui dépasserait de beaucoup les circonférences dont il s'agit, serait stable [1]. Dans la figure la plus rentrée, au contraire, la limite de la stabilité est en deçà de ces mêmes circonférences.

2° A mesure que l'écartement des disques est plus grand, les deux figures se rapprochent l'une de l'autre, et il en est de même de leurs limites respectives de stabilité; enfin, pour une certaine valeur maxima de l'écartement, ces deux figures coïncident, ainsi que leurs

(1) En résumant ma 4me Série dans les ANN. DE CHIM. ET DE PHYS. DE PARIS (3me série, t. LIII), j'ai dit, page 37, que la figure obtenue dans un anneau en fil de fer, est à sa limite de stabilité; cette assertion est évidemment trop positive.

limites de stabilité, qui se trouvent alors aux bords mêmes des disques. Je suis porté à croire que ce dernier cas est celui du nodoïde dont la ligne méridienne est engendrée par le roulement d'une hyperbole équilatère, et je pense, en outre, qu'au delà de l'écartement en question, il n'y a plus de nodoïde étranglé possible entre les mêmes disques.

Si ces conjectures sont vraies, le nodoïde étranglé aurait, dans un cas particulier simple, une limite de stabilité nettement définie.

§ 390. Dans le second cas de réalisation, c'est-à-dire dans celui où la figure est engendrée par un arc convexe vers l'extérieur, on a vu (§§ 71 et 114) qu'en rapprochant graduellement les deux disques, on atteint un point au delà duquel la figure, soit pleine, soit laminaire, perd sa forme de révolution, la masse d'huile ou la lame se portant davantage d'un côté de l'axe du système; on a vu aussi qu'à la plus petite distance des disques où la figure conserve sa régularité, les éléments de l'arc méridien aux points où il aboutit aux deux disques, semblent être, ou à fort peu près, perpendiculaires à l'axe. On pourrait présumer, d'après cela, que la limite de stabilité du nodoïde partiel renflé correspond au cas où les éléments extrêmes de l'arc méridien sont perpendiculaires à l'axe; mais j'ai cherché à décider la question par de nouvelles expériences.

On a d'abord mesuré exactement le diamètre des disques; il était, pour l'un, de $71^{mm},38$, et, pour l'autre, de $71^{mm},82$, moyenne $71^{mm},60$. On a ensuite fait adhérer à l'ensemble de ces deux disques, au sein du liquide alcoolique, une masse d'huile suffisante, puis on a abaissé graduellement le disque supérieur, et on l'a arrêté au point au delà duquel la figure renflée commençait à perdre sa forme de révolution. Cela fait, on a mesuré au cathétomètre l'intervalle des deux disques, ou plutôt la distance comprise entre la face supérieure du disque supérieur et la face inférieure du disque inférieur, puisque c'était des bords de ces deux faces que partait la surface libre de la figure liquide; on a effectué cette opération de deux côtés opposés de l'axe, et l'on a trouvé les deux valeurs $63^{mm},95$ et $64^{mm},08$, moyenne $64^{mm},01$; enfin, en disposant le cathétomètre horizontalement, on a mesuré le diamètre équatorial de la figure, et l'on a obtenu $118^{mm},67$.

Or, en prenant comme données le diamètre des disques et le diamètre équatorial de la masse, M. Lamarle a bien voulu calculer pour moi, au moyen des fonctions elliptiques (§ 84), la distance qui aurait dû exister entre les bords solides d'où partait la figure liquide pour qu'à ces bords les éléments fussent perpendiculaires à l'axe, et il a trouvé ainsi $51^{mm},9$, valeur qui n'est que les huit dixièmes environ de la distance mesurée $64^{mm},01$.

On a répété ensuite l'expérience avec une masse d'huile moindre. Ici la distance des disques était, en moyenne, $39^{mm},63$, et le diamètre équatorial de la figure $101^{mm},17$; la valeur de la distance des disques déduite du calcul, pour le cas de l'horizontalité réelle des éléments extrêmes, était $32^{mm},10$, qui constitue aussi les huit dixièmes de la valeur mesurée.

Il suit évidemment de ce constant désaccord entre l'apparence des figures et les résultats du calcul, que, dans ces figures, les éléments extrêmes de l'arc méridien faisaient encore, en réalité, un angle notable avec les prolongements des rayons des disques, et que si, au simple aspect, on pouvait croire cet angle nul, cela tenait à la grande difficulté d'une semblable appréciation.

On doit, je pense, conclure de là que, dans le nodoïde partiel renflé, la limite de la stabilité est en deçà des circonférences où les éléments sont perpendiculaires à l'axe.

§ 391. Dans les expériences que je viens de décrire, quand, après avoir abaissé le disque supérieur jusqu'à la dernière limite où la figure liquide se maintient régulière, on abaisse encore ce même disque d'une quantité très-petite, le transport latéral de la masse est aussi très-petit, et reste tel tant que le disque demeure dans la même position ; il augmente par un abaissement ultérieur, et se montre d'autant plus prononcé que l'abaissement est plus grand.

Le nodoïde partiel renflé nous offre donc un nouvel exemple d'une figure liquide permanente bien qu'étant à sa limite de stabilité, et le phénomène s'explique comme à l'égard du caténoïde plein : c'est que la figure stable dans laquelle ce nodoïde se convertirait spontanément s'il était au delà de sa limite, est d'autant plus rapprochée que le nodoïde est supposé plus près de cette limite, et coïncide enfin avec lui à la limite même.

Ajoutons une dernière remarque : lorsque le cylindre, l'onduloïde étranglé, l'onduloïde renflé, le caténoïde et le nodoïde étranglé atteignent ou dépassent leur limite de stabilité, et, par suite, s'altèrent spontanément, le phénomène s'accomplit sans que la figure liquide perde sa forme de révolution, et la figure stable résultante est encore de révolution autour du même axe ; mais, ainsi qu'on vient de le voir, le nodoïde renflé fait exception : pendant sa déformation spontanée, la figure se montre dissymétrique, et elle demeure telle après l'achèvement du phénomène. Un autre exemple de dis-symétrie s'était déjà présenté à nous dans la déformation spontanée d'un nœud de nodoïde réalisé en relief dans un anneau en fil de fer (§ 67).

§ 392. Dans cette recherche des limites de stabilité des figures d'équilibre de révolution, nous avons toujours supposé la figure terminée à deux sections perpendiculaires à l'axe et égales en diamètre. Mais il est clair qu'on pourrait adopter d'autres terminaisons, et qu'alors les limites de stabilité seraient différentes : on pourrait, par exemple, prendre encore pour bases de la figure deux sections perpendiculaires à l'axe, mais leur donner, sauf dans le cas du cylindre, des diamètres inégaux. On a vu (§ 91) que M. Lindelöf a traité analytiquement, sous ce rapport, la question du caténoïde ; mais j'étais arrivé auparavant à un résultat remarquable que j'avais fait connaître dans ma 11^{me} Série; le voici : quand on prend le cercle de gorge pour l'une des terminaisons, le caténoïde n'a plus de limite de stabilité, c'est-à-dire que la seconde base peut être aussi loin de la première qu'on le veut, sans que la figure tende à s'altérer spontanément.

Pour le démontrer, concevons un onduloïde partiel terminé d'un côté au cercle de gorge d'un étranglement, et, de l'autre côté, à l'équateur de l'un des deux renflements entre lesquels, dans la figure indéfinie, cet étranglement serait compris ; l'onduloïde ainsi formé sera très-stable, puisque, en conservant la première base, il faudrait, pour atteindre la limite de stabilité, reculer la seconde jusqu'au cercle de gorge suivant (§ 52). Imaginons maintenant que, la première base, savoir le cercle de gorge, demeurant constante, on fasse varier l'onduloïde en question de manière qu'il converge graduellement vers le caténoïde ; notre seconde base, c'est-à-dire la section équatoriale du renflement, ira en croissant et en s'éloignant de la première, et la figure conservera évidemment sa stabilité; enfin, à la limite de ces variations, ou, en d'autres termes, quand la section dont il s'agit sera infiniment grande et infiniment éloignée, l'onduloïde, qui n'aura pu perdre sa stabilité, sera un demi-caténoïde s'étendant à l'infini à partir du cercle de gorge ; si donc on prend où l'on veut, sur ce demi-caténoïde, une section perpendiculaire à l'axe, et qu'on en fasse la seconde base de la figure, cette figure sera toujours nécessairement stable.

Afin de vérifier cette déduction, j'ai pris, pour la seconde base, l'anneau en fil de fer de 20 centimètres de diamètre, employé dans l'expérience du § 186[bis], et, pour le cercle de gorge, un autre anneau, dont le diamètre n'était que de 3,5 centimètres; celui-ci était porté par une fourche dont la queue était fixée sous un bras horizontal mobile le long d'une tige verticale. On a mouillé de liquide glycérique ce petit anneau, puis on a produit une lame du même liquide dans le grand, et l'on a posé ce dernier sur ses pieds, de façon que la lame fût horizontale; le support qui soutenait le petit anneau a été ensuite placé de manière que ce petit anneau fût audessus du grand et que les centres de tous deux fussent sur une même verticale; on a abaissé alors le petit anneau jusqu'à ce qu'il vînt se mettre en contact avec la lame, puis on l'a soulevé graduellement. La lame adhérant à la fois aux deux anneaux, a pris nécessairement la forme d'une portion de caténoïde, et l'on a pu ainsi arriver à rendre d'abord vertical l'élément de la chaînette méridienne qui aboutissait au petit anneau, puis à le faire rentrer vers l'axe d'une manière visible, de sorte que la figure présentât un commencement d'étranglement ; en d'autres termes, on a pu non-seulement atteindre le demi-caténoïde, mais même le dépasser un peu, sans que la figure perdît sa stabilité.

Ce dernier résultat est d'accord, autant qu'on peut en juger en l'absence de mesures précises, avec les nombres du tableau du § 91. On voit, en effet, par ce tableau, que, quel que soit le rapport des diamètres des bases, le caténoïde, à sa limite, a toujours un cercle de gorge ; mais on voit, en même temps, qu'à mesure que le diamètre de la base supérieure diminue, celui du cercle de gorge s'en rapproche, de telle sorte que si le diamètre de la base supérieure n'est, comme dans mon expérience, que les 0,17 de celui de la base inférieure, l'étranglement doit être assez légèrement accusé. On n'a pu, d'ailleurs, observer cet étranglement qu'un peu en deçà de la hauteur limite du caténoïde, puisque, à cette limite même, la figure se désunissait.

Dans l'article où il donne le tableau dont il s'agit, M. Lindelöf montre que ses formules établissent, comme mon raisonnement, l'absence de limite de stabilité à l'égard du caténoïde dont l'une des bases est le cercle de gorge.

Les nombres du tableau, du moins ceux de la 2me colonne, sont susceptibles de vérifications expérimentales précises ; seulement elles ne seraient pas sans difficultés, car il faudrait trouver le moyen de rendre les plans des deux anneaux exactement parallèles et de disposer rigoureusement les deux centres sur une même perpendiculaire à ces plans.

§ 393. Les figures d'équilibre qui ne sont pas de révolution ont aussi, et pour la plupart sans nul doute, leurs limites respectives de stabilité. Seulement il faut, pour chacune d'elles, faire également une convention à l'égard du système solide dans lequel on la comprend.

Je citerai d'abord, comme exemple, celle des surfaces mentionnées dans le § 137, que j'ai réalisée à l'état laminaire; ainsi qu'on l'a vu (§ 138), on obtient une portion stable de cette surface dans le système solide que j'ai choisi, quand la hauteur de celui-ci est égale à sa largeur; mais il n'en est plus de même quand la hauteur est quadruple de la largeur.

Je citerai encore l'héliçoïde de M. Lamarle que j'ai réalisé avec de l'huile dans le liquide alcoolique (§ 132). Il était compris, on se le rappelle, entre des sections perpendiculaires à l'axe de la figure; or il montrait une stabilité bien décidée quand les sections solides étaient distantes d'un quart de spire; mais on ne parvenait plus à le former entre deux sections éloignées d'une demi-spire, ce qui indique qu'avec cette longueur il est instable.

J'étais porté à croire que l'héliçoïde gauche à plan directeur n'a pas de limite de stabilité, du moins lorsqu'il est compris, à l'état laminaire, dans un système solide composé d'une portion de l'axe et d'une hélice rattachée à celui-ci par des portions droites (§ 130); en effet, celui que j'ai réalisé avait deux spires complètes, et il était parfaitement stable; or, d'après une remarque de M. Schwarz(1), on démontre aisément l'exactitude de cette conjecture, en partant d'un résultat connu du calcul des variations.

(1) Voir l'article inscrit au § 508 sous le n° 37.

CHAPITRE [illegible]

Stabilité des figures d'équilibre [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible]

[illegible] Pour [illegible] supposant un cylindre liquide dont la forme est [illegible] de manière qu'il présente une suite de renflements et d'étranglements [illegible] M. Hagen admet que les arcs méridiens de ses renflements et de ses étranglements peuvent sans erreur sensible être assimilés à des arcs de cercle [illegible] dans cette hypothèse, les pressions capillaires exercées aux sommets respectifs d'un arc convexe et d'un arc concave, et enfin il cherche la limite de la stabilité en partant de la considération que la différence des deux pressions ci-dessus doit être positive d'un côté de cette limite, et négative de l'autre côté: il arrive ainsi à la valeur [illegible], c'est-à-dire au nombre [illegible] (§ [illegible]). Dans un article [illegible] en réponse à cette Note, j'ai

[illegible] M. [illegible]

[illegible]

fait voir que la méthode employée par M. Hagen, bien qu'ingénieuse, ne pouvait donner qu'une valeur plus ou moins éloignée de la véritable, parce que les arcs méridiens des renflements et des étranglements ne sont pas des arcs de cercle, et qu'en substituant à ces derniers des arcs de sinusoïde, évidemment plus rapprochés de ceux de la courbe réelle, on obtient un résultat notablement différent.

J'ai annoncé alors que j'étais parvenu, à l'aide d'une méthode rigoureuse, à la valeur exacte de la limite dont il s'agit, et que cette valeur exacte est la quantité π, c'est-à-dire le rapport de la circonférence au diamètre, ou 3,1416. Je vais maintenant faire connaître cette méthode; le principe sur lequel elle repose m'a été fourni par M. Lamarle.

§ 396. Supposons un cylindre d'huile horizontal réalisé entre deux disques au sein du mélange alcoolique, et assez court pour être stable, sans être cependant trop en deçà de la limite. Si, en poussant légèrement le liquide en plus grande quantité vers l'un des disques au moyen du bec de la petite seringue, on détermine la formation artificielle d'un renflement et d'un étranglement, et si cette modification de la figure ne dépasse pas un certain degré, la masse abandonnée ensuite à elle-même reprend spontanément la figure cylindrique initiale. Mais si l'altération excède le degré dont il s'agit, elle progresse ensuite spontanément, et la transformation s'achève.

Or, au degré précis d'altération qui sépare les tendances à ces deux effets opposés, la masse doit évidemment être indifférente à l'une et à l'autre; il doit donc y avoir là un état d'équilibre, bien que cet équilibre soit instable; et comme la figure est alors encore de révolution et qu'elle se compose d'un renflement et d'un

CHAPITRE X.

Stabilité des figures d'équilibre; étude théorique, et vérifications expérimentales.

§ 394. Dans le chapitre précédent, nous n'avons eu recours qu'à l'expérience; voyons maintenant ce que la théorie peut nous apprendre à l'égard de la stabilité de nos figures.

Quelques mois après la publication de ma 2^me^ Série, où j'avais exposé l'étude expérimentale de la stabilité du cylindre, M. Hagen a essayé[1] d'appliquer le calcul à la recherche de la limite relative à cette figure. Pour cela, supposant un cylindre liquide dont la forme est très-légèrement altérée de manière qu'il présente une suite de renflements et d'étranglements égaux et extrêmement peu prononcés, M. Hagen admet que les arcs méridiens de ces renflements et de ces étranglements peuvent, sans erreur sensible, être assimilés à des arcs de cercle. Il calcule, dans cette hypothèse, les pressions capillaires exercées aux sommets respectifs d'un arc convexe et d'un arc concave, et enfin il cherche la limite de la stabilité en partant de la considération que la différence des deux pressions ci-dessus doit être positive d'un côté de cette limite, et négative de l'autre côté; il arrive ainsi à la valeur $2^{\frac{3}{2}}$, c'est-à-dire au nombre 2,8284.

§ 395. Dans un article[2] en réponse à cette Note, j'ai

(1) *Ueber die Auflösung flüssiger Cylinder in Tropfen* (Ann. de M. Poggendorff, année 1850, vol. LXXX, p. 559).

(2) *Ueber die Gränze der Stabilität eines flüssigen Cylinders* (Ibid., ibid., p. 566).

fait voir que la méthode employée par M. Hagen, bien qu'ingénieuse, ne pouvait donner qu'une valeur plus ou moins éloignée de la véritable, parce que les arcs méridiens des renflements et des étranglements ne sont pas des arcs de cercle, et qu'en substituant à ces derniers des arcs de sinusoïde, évidemment plus rapprochés de ceux de la courbe réelle, on obtient un résultat notablement différent.

J'ai annoncé alors que j'étais parvenu, à l'aide d'une méthode rigoureuse, à la valeur exacte de la limite dont il s'agit, et que cette valeur exacte est la quantité π, c'est-à-dire le rapport de la circonférence au diamètre, ou 3,1416. Je vais maintenant faire connaître cette méthode; le principe sur lequel elle repose m'a été fourni par M. Lamarle.

§ 396. Supposons un cylindre d'huile horizontal réalisé entre deux disques au sein du mélange alcoolique, et assez court pour être stable, sans être cependant trop en deçà de la limite. Si, en poussant légèrement le liquide en plus grande quantité vers l'un des disques au moyen du bec de la petite seringue, on détermine la formation artificielle d'un renflement et d'un étranglement, et si cette modification de la figure ne dépasse pas un certain degré, la masse abandonnée ensuite à elle-même reprend spontanément la figure cylindrique initiale. Mais si l'altération excède le degré dont il s'agit, elle progresse ensuite spontanément, et la transformation s'achève.

Or, au degré précis d'altération qui sépare les tendances à ces deux effets opposés, la masse doit évidemment être indifférente à l'une et à l'autre; il doit donc y avoir là un état d'équilibre, bien que cet équilibre soit instable; et comme la figure est alors encore de révolution et qu'elle se compose d'un renflement et d'un étranglement, elle forme nécessairement une portion d'onduloïde. En second lieu, puisque cet onduloïde partiel constitue le degré d'altération où va commencer la tendance spontanée à une altération plus profonde, il doit s'écarter d'autant moins de la figure initiale, c'est-à-dire du cylindre, que celui-ci est plus près de sa limite de stabilité. Enfin, lorsque le cylindre est à cette limite même, l'onduloïde partiel doit coïncider exactement avec lui, puisque alors la plus faible trace d'un renflement et d'un étranglement doit suffire pour amener la transformation spontanée.

§ 397. Le principe ci-dessus étant admis, appliquons-y le calcul. Reprenons l'expression de la condition générale à laquelle doivent satisfaire les lignes méridiennes des figures d'équilibre de révolution, savoir (§ 36)

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{N} = C,$$

expression où M est le rayon de courbure et N la normale. Dans le cas du cylindre, la ligne méridienne étant une droite, M est partout infini, ce qui réduit la formule à $\frac{1}{N} = C$, d'où $N = \frac{1}{C}$; or comme la droite en question est parallèle à l'axe, la normale N est le rayon du cylindre engendré, d'où il suit que ce rayon est égal à $\frac{1}{C}$.

Rappelons-nous, en outre, que l'expression générale ci-dessus, mise sous la forme différentielle, peut s'intégrer une première fois (§ 84). Si l'on prend l'axe de révolution comme axe des x, cette intégrale, qui représente nos lignes méridiennes, devient :

$$\frac{y}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{Cy^2}{2} + C', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [1]$$

p désignant le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, et C′ étant la constante arbitraire introduite par l'intégration. S'il s'agit du cylindre, la tangente est nulle partout; faisant donc $p = 0$ et résolvant par rapport à y, on a :

$$y = \frac{1}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{1 - 2CC'}.$$

Il est clair qu'ici y est le rayon du cylindre, et puisque ce rayon est simplement égal à $\frac{1}{C}$, la constante arbitraire C′ doit être déterminée de manière à annuler le radical $\sqrt{1 - 2CC'}$, c'est-à-dire qu'il faut faire $C' = \frac{1}{2C}$.

Cela posé, concevons un cylindre réalisé entre deux disques de rayon $\frac{1}{C}$, et supposons la distance de ces disques telle que le cylindre soit en deçà de sa limite de stabilité, mais extrêmement près de celle-ci. Alors l'onduloïde partiel qui lui correspond s'en écartera à peine; en d'autres termes, les arcs méridiens du renflement et de l'étranglement seront presque confondus avec la droite $y = \frac{1}{C}$, et il en sera de même des arcs méridiens de tous les autres renflements et étranglements de la figure complète, c'est-à-dire infiniment prolongée au delà des disques. Dans cette circonstance, par conséquent, l'ordonnée y variera très-peu sur toute l'étendue de la ligne méridienne, et la tangente p demeurera toujours fort petite.

Introduisons ces conditions dans l'équation [1], et, pour cela, transportons l'axe des x parallèlement à lui-même, au-dessus de sa position première, d'une quantité égale à $\frac{1}{C}$, de manière à le faire coïncider avec la génératrice du cylindre. Remplaçons donc y par $y + \frac{1}{C}$, et n'oublions pas que, dans l'équation transformée, y représentera l'ordonnée comptée à partir du nouvel axe des abscisses, de sorte que, dans toute la courbe, y demeurera, comme p, fort minime. Développons, en outre, le radical $\sqrt{1+p^2}$; nous pourrons négliger toutes les puissances de p supérieures à la deuxième, et nous aurons ainsi, au lieu du radical en question, la quantité $1+\frac{1}{2}p^2$. Faisant donc ces substitutions, l'équation [1] deviendra, les réductions étant effectuées,

$$2C^2y^2 + C^2p^2y^2 + 2Cp^2y + (1+2CC')p^2 = 2(1-2CC'). \quad [2]$$

Enfin, à cause de la petitesse de y et de p, négligeons les termes du 4^me et du 3^me degré $C^2p^2y^2$ et $2Cp^2y$, et l'équation se réduira ainsi à

$$2C^2y^2 + (1+2CC')p^2 = 2(1-2CC') \quad . \quad . \quad . \quad [3]$$

L'erreur que nous commettrons sera d'autant plus minime que l'onduloïde se rapprochera davantage du cylindre, et le résultat que nous tirerons de cette équation, pour le cas où l'onduloïde se confond avec le cylindre, sera rigoureusement exact.

Écrivant, dans cette même équation, $\frac{dy}{dx}$ au lieu de p, et résolvant par rapport à dx, il vient :

$$dx = \sqrt{\frac{1+2CC'}{2}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{1-2CC'-C^2y^2}},$$

ce qui donne, par l'intégration :

$$x = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{1+2CC'}{2}} \cdot \arcsin \frac{Cy}{\sqrt{1-2CC'}} \quad . \quad . \quad . \quad [4]$$

Je n'ajoute point de constante arbitraire, parce que je prends pour origine l'un des points où la courbe coupe l'axe des x, ce qui exige que l'équation soit satisfaite en y faisant à la fois $y=0$ et $x=0$.

Telle est donc l'équation approchée de la ligne méridienne de l'onduloïde en question, équation d'autant plus exacte que cet onduloïde est plus près de coïncider avec le cylindre. Cette même équation résolue par rapport à y devient :

$$y = \frac{\sqrt{1 - 2CC'}}{C} \sin C \sqrt{\frac{2}{1 + 2CC'}} \cdot x \quad . \quad . \quad . \quad [5]$$

C'est l'équation d'une sinusoïde, et l'on voit que les points où, après avoir quitté l'origine, la courbe va de nouveau couper l'axe des abscisses, sont à des distances de l'origine successivement égales à

$$\frac{1}{C}\sqrt{\frac{1 + 2CC'}{2}} \cdot \pi, \qquad \frac{1}{C}\sqrt{\frac{1 + 2CC'}{2}} \cdot 2\pi, \text{ etc.}$$

Or la seconde est évidemment la longueur d'une portion de l'onduloïde composée d'un renflement et d'un étranglement ; en la désignant par L, nous aurons donc

$$L = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{1 + 2CC'}{2}} \cdot 2\pi.$$

Lorsque l'onduloïde se confondra avec le cylindre, cette longueur sera, en vertu du principe du paragraphe précédent, celle qui correspond à la limite de la stabilité de ce cylindre, et elle sera alors rigoureusement exacte ; or, quand la figure est devenue un cylindre, le rayon de celui-ci est, comme on l'a vu, représenté par $\frac{1}{C}$, et l'on a en même temps, comme on l'a vu aussi, $C' = \frac{1}{2C}$; si donc on désigne le rayon par r, on aura $C = \frac{1}{r}$ et $C' = \frac{r}{2}$. Substituant ces valeurs dans l'expression de L, on obtient enfin, pour la longueur précise qui correspond à la limite de la stabilité du cylindre,

$$L = 2\pi r,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{L}{2r} = \pi.$$

Ainsi un cylindre liquide compris entre deux bases solides est exactement à sa limite de stabilité, quand sa longueur, ou l'intervalle de ses bases, est égale à sa circonférence, ou, ce qui revient au même, quand le rapport de sa longueur à son diamètre est égal à π.

Je ferai connaître plus loin une autre méthode au moyen de laquelle j'arrive, sans aucun calcul, au même résultat, en partant du principe de M. Delaunay (§ 82); mais je ne puis l'exposer qu'après ce qui concerne la limite de stabilité de l'onduloïde.

§ 398. Beer, dans le premier des deux Mémoires où il soumet au calcul une partie des résultats de mes expériences (1), parvient également à la quantité π; voici de quelle manière. Supposant une masse liquide adhérente à un cylindre solide suffisamment long, il obtient nécessairement, pour ligne méridienne, celle d'une portion d'onduloïde, portion qui se compose d'un renflement et de deux demi-étranglements. Il montre ensuite, à l'aide d'un artifice de calcul, que si l'on diminue progressivement le rayon équatorial de la figure, la distance des deux points extrêmes de la ligne méridienne converge vers une valeur égale à la circonférence du cylindre solide, valeur qu'elle atteint lorsque le rayon équatorial

(1) *Ueber die Oberflächen rotirender Flüssigkeiten im algemeinen, insbesondere über den Plateau'schen Rotationsversuch* (ANN. DE M. POGGENDORFF, 1855, t. XCVI, pp. 1 et 210).

est égal à celui de ce cylindre, ou, en d'autres termes, lorsque la masse liquide est réduite à une couche infiniment mince sur la surface de ce même cylindre. Puis, après l'exposé d'un résultat qui ne se rapporte point au sujet actuel, vient un passage que je traduis ici, en avertissant le lecteur que Beer représente par $2y_4$ la distance ci-dessus.

« Concevons un cylindre d'huile infiniment long placé dans l'alcool dilué, et faisons-lui subir uniformément, dans toute sa longueur, une petite altération telle que la surface demeure *minimæ areæ*(1). Cette surface sera évidemment une surface de révolution dont la ligne méridienne ne se composera que de courbes égales de l'espèce considérée plus haut, se raccordant entre elles. Le cylindre acquiert ainsi une suite régulière d'étranglements alternant avec des renflements. Pour une déformation très-petite, l'enfoncement et la saillie de ces étranglements et renflements sont également très-petits, et le cylindre auquel les courbes en question seraient tangentes s'écarte aussi fort peu de la surface primitive de l'huile. De là résulte donc que la distance de deux étranglements avance d'autant plus vers la limite de $2y_4$ trouvée plus haut pour la surface originairement cylindrique, et conséquemment vers la valeur de la circonférence de cette dernière, que la déformation supposée est plus faible. La limite de $2y_4$, indépendante de la nature du liquide, n'est évidemment autre chose que la limite de la stabilité d'un cylindre liquide soustrait à la pesanteur, limite observée et mesurée par M. Plateau. Ce physicien a trouvé qu'en prenant pour unité le diamètre du cylindre, la limite dont il s'agit est comprise

(1) On verra plus loin (§§ 413 et 418) que Beer n'emploierait plus aujourd'hui cette expression dans le cas dont il s'agit.

entre 3 et 3,6. M. Hagen est arrivé, par une voie théorique, à la valeur 2,828, à quoi M. Plateau oppose la remarque suivante : *Si l'on remplace le rayon de courbure qu'emploie M. Hagen par celui du sommet des arcs d'une sinusoïde, on obtient alors, pour valeur de la limite de la stabilité, la quantité* π. Et, en effet, d'après ce qui précéde, cette dernière quantité est la valeur exacte. »

Par l'expression : la distance de deux étranglements (*zweier Einschnürungen*), il faut entendre la distance des milieux de ceux-ci ; et comme cet intervalle comprend un renflement et deux demi-étranglements, il équivaut en longueur à l'ensemble d'un renflement et d'un étranglement ; Beer a donc cherché de son côté, bien que par une méthode essentiellement différente de la mienne, ce que devient la longueur d'une portion d'onduloïde composée d'un renflement et d'un étranglement, lorsque cet onduloïde passe au cylindre ; mais il regarde comme évident que cette même longueur est celle qui correspond à la limite de la stabilité du cylindre, et cependant on ne voit a priori aucune relation nécessaire entre la longueur d'une portion d'onduloïde, au moment où elle se confond avec le cylindre, et la stabilité ou l'instabilité de celui-ci. Il est bien vrai qu'un cylindre, à sa limite de stabilité, se modifie de manière à présenter une portion renflée et une portion étranglée ; mais rien ne dit immédiatement qu'à l'origine de cette déformation, la figure appartienne à l'onduloïde ; c'est un point qu'il fallait établir, ainsi que je l'ai fait dans le § 396 ; cette recherche de Beer est donc incomplète, elle demande une démonstration qu'il ne donne pas.

Dans son second travail[1], il effectue la même déter-

(1) *Tractatus de Theoria mathematica phænomenorum in liquidis actioni gravitatis detractis observatorum.* Bonn, 1857.

mination au moyen de son intégrale elliptique (§§ 84 et 85), mais il n'établit pas davantage la relation entre le résultat et la stabilité du cylindre.

§ 399. J'ai essayé, à l'aide des cylindres d'huile formés entre deux disques solides au sein du mélange alcoolique, de vérifier, par des expériences plus précises que celles des §§ 45 et 359, la valeur exacte π de la limite de stabilité du cylindre. Je vais rendre compte des résultats, mais auparavant je dois présenter ici quelques remarques sur la marche à suivre dans ce genre de recherche.

La limite de stabilité d'une figure d'équilibre constitue un passage graduel entre deux états différents de cette figure, et conséquemment l'expérience seule ne peut la déterminer d'une manière rigoureuse; mais elle peut conduire à deux valeurs assez rapprochées l'une de l'autre et telles que, pour la première, il y ait encore stabilité certaine, tandis que, pour la seconde, il y a déjà instabilité certaine. Si ces deux valeurs sont peu différentes, comme je l'ai supposé, leur moyenne donnera avec une grande approximation la vraie valeur de la limite.

J'ai employé cette méthode à l'égard du cylindre. Quand on n'est pas trop près de la limite, il y a deux caractères qui accusent nettement la stabilité ou l'instabilité de cette figure : si, le cylindre étant réalisé dans le voisinage de sa limite et conservant sa forme, on y produit artificiellement, en poussant l'huile à l'aide du bec de la seringue, un renflement et un étranglement peu prononcés, et que la figure reprenne ensuite d'elle-même sa forme première, il est évident qu'elle possède encore une stabilité réelle; d'autre part si, pendant qu'on essaie d'obtenir le cylindre, c'est-à-dire pendant que la masse d'huile est en excès et qu'on la diminue pour arriver à la forme cylindrique, la figure commence déjà à s'altérer spontanément avant que cette forme soit atteinte, on doit en conclure que le cylindre qu'on veut réaliser serait instable. La limite exacte se trouve donc entre les longueurs les plus rapprochées où ces deux effets sont encore respectivement observables.

§ 400. L'appareil dont j'ai fait usage consiste en deux disques verticaux en fer minces, de même diamètre, placés en regard, et dont l'un peut être graduellement rapproché ou éloigné de l'autre. Chacun d'eux est porté par un gros fil de fer implanté normalement au centre de sa face postérieure, et replié verticalement de haut en bas; l'extrémité inférieure de celui qui soutient le disque immobile est fixée à l'un des bouts d'une barre horizontale en fer à section carrée, et l'extrémité inférieure de celui qui soutient le disque mobile est fixée à un curseur qui glisse sans ballottement le long de cette barre. Une vis maintenue parallèlement à celle-ci, et qu'on peut faire tourner sur elle-même au moyen d'une manivelle, s'engage dans un écrou tenant au curseur; en faisant agir la manivelle dans un sens ou dans l'autre, on oblige ainsi le curseur avec son disque à marcher en avant ou en arrière. La barre horizontale est munie de quatre petits pieds, qui sont attachés eux-mêmes sur une plaque rectangulaire en plomb servant de base à tout le système; cette plaque était destinée à empêcher, par sa masse, que l'appareil placé au fond du vase à parois planes, dans le liquide alcoolique, n'oscillât pendant les opérations. Enfin on imprimait le mouvement à la manivelle à l'aide d'une bielle suffisamment longue dont on tenait à la main l'autre extrémité.

Le diamètre de chacun des disques a été mesuré au cathétomètre, et l'on a trouvé pour l'un $30^{mm},05$, et pour l'autre $30^{mm},18$; la moyenne $30^{mm},11$ a été prise pour le diamètre du cylindre; la différence $0^{mm},13$ entre ces deux diamètres était évidemment trop petite pour exercer une influence appréciable sur les résultats. Dans chaque expérience, la distance des disques était mesurée au moyen du cathétomètre disposé horizontalement, en visant à la partie supérieure de ces disques; on s'était assuré d'ailleurs du parallélisme de leurs plans.

1re EXPÉRIENCE. — On a placé d'abord le disque mobile à $108^{mm},40$ de l'autre, ce qui donnait à fort peu près 3,6 pour le rapport de la longueur du cylindre à son diamètre, puis on a fait adhérer à l'ensemble des deux disques une masse d'huile en excès, de sorte que la figure constituait un onduloïde assez fortement renflé au milieu. Alors on a absorbé graduellement du liquide, en observant de temps à autre la figure, et celle-ci a commencé à se déformer spontanément lorsque la flèche du renflement ci-dessus était encore d'environ 5^{mm}.

2me EXPÉRIENCE. — On a rapproché ensuite les disques, de manière à amener leur distance à $99^{mm},36$, ce qui correspondait au rapport 3,3. La figure étant ainsi redevenue stable, on a continué à enlever du liquide, et la tendance à la déformation spontanée ne s'est manifestée que lorsque la flèche du renflement n'était plus que de $2^{mm},5$ à peu près.

3me EXPÉRIENCE. — Distance des disques $95^{mm},75$, rapport 3,18. La figure était de nouveau stable, et l'épuisement ultérieur a dû réduire la flèche à moins d'un millimètre pour qu'on vît la figure se déformer d'elle-même(1).

(1) Le rapport de la longueur au diamètre est donné ici avec deux décimales, parce qu'on reconnaît que l'on approche déjà de la limite.

4me EXPÉRIENCE. — Distance des disques $94^{mm},53$, rapport 3,14. Il ne s'est plus montré de tendance à la déformation spontanée tant que la flèche avait une valeur sensible, de sorte qu'on est arrivé sans difficulté à la forme cylindrique; mais ce cylindre, abandonné à lui-même, après avoir paru persister pendant quelques secondes, a commencé à s'altérer, avec une extrême lenteur d'abord, puis graduellement plus vite : la figure s'est partagée, comme à l'ordinaire, en une portion renflée et une portion étranglée, et la déformation a continué à marcher jusqu'à la désunion complète. On a refait plusieurs fois l'expérience, et toujours avec les mêmes résultats.

5me EXPÉRIENCE. — Distance des disques $93^{mm},03$, rapport 3,09. On a atteint sans peine la forme cylindrique, puis on a produit artificiellement un étranglement et un renflement, la flèche de ce dernier étant à peu près de 1^{mm}. La figure abandonnée à elle-même a repris la forme cylindrique, et il a fallu, pour amener le progrès spontané de la déformation, porter la flèche du renflement artificiel à 3^{mm} environ.

6me EXPÉRIENCE. — Distance des disques $93^{mm},65$, rapport 3,11. On est parvenu de même au cylindre; pour qu'il y eût progrès spontané de la déformation, la flèche du renflement artificiel a dû être comprise entre 2^{mm} et 3^{mm}. Dans cette expérience, avant de former le cylindre, on avait, bien entendu, ajouté un peu d'huile à la masse.

7me EXPÉRIENCE. — Distance des disques $94^{mm},18$,

Il en est de même à l'égard des expériences suivantes; on a, bien entendu, renforcé la seconde décimale quand la troisième eût été assez grande; dans des expériences de cette nature, il serait, je pense, illusoire de vouloir pousser la précision plus loin.

rapport 3,13. Après une nouvelle addition préalable de liquide, on est parvenu encore au cylindre; le progrès spontané a commencé quand la flèche du renflement artificiel n'était que de 1^{mm} et une fraction.

§ 401. On le voit, dans les trois premières expériences, la figure a manifesté le caractère indiquant qu'un cylindre formé entre les disques serait instable, et, de la première à la troisième, ce caractère a été de moins en moins prononcé; enfin, dans cette troisième expérience, pour laquelle le rapport était 3,18, on se trouvait déjà fort près de la limite cherchée. Les trois dernières expériences ont manifesté, au contraire, le caractère de la stabilité du cylindre, et cette stabilité a a été en décroissant de la cinquième expérience à la septième, pour laquelle le rapport était 3,13 et la stabilité très-faible.

On peut donc affirmer, abstraction faite de tout résultat théorique, que la limite de la stabilité du cylindre est comprise entre les valeurs 3,13 et 3,18, qui ne diffèrent entre elles que de 0,05; et comme les cylindres correspondants à ces deux valeurs ont encore respectivement, d'une manière nette, les caractères de la stabilité et de l'instabilité, la limite cherchée est notablement supérieure à la première et inférieure à la seconde. Conséquemment si l'on prend la moyenne de ces mêmes valeurs, savoir 3,15, on peut être certain que la limite véritable n'en est pas éloignée de 0,02, quantité qui n'est que les 0,006 de cette même moyenne.

Ainsi, en partant des seuls résultats de l'expérience, on doit regarder le nombre 3,15 comme étant la valeur très-approchée de la limite de la stabilité du cylindre; or ce nombre diffère à peine de la valeur théorique π, ou 3,14; enfin la quatrième expérience montre qu'en plaçant les disques à la distance qui donne ce rapport théorique 3,14, la figure ne présente plus ni l'un ni l'autre des caractères de l'instabilité ou de la stabilité du cylindre, c'est-à-dire que, d'une part, elle ne manifeste aucune tendance à la transformation tant que la forme cylindrique n'est pas atteinte, et que, d'autre part, quand le cylindre est formé, il n'exige, pour commencer et accomplir sa transformation, aucune altération artificielle.

L'ensemble des expériences ci-dessus peut donc être considéré comme vérifiant pleinement la théorie.

§ 402. La cinquième, la sixième et la septième expérience, c'est-à-dire celles qui ont été faites en deçà de la limite, ont offert une particularité en apparence fort singulière. Chacune d'elles a été répétée plusieurs fois; or, dans certains cas, le cylindre, qui semblait bien régulier, s'altérait de lui-même après quelques instants : on voyait s'y dessiner un renflement et un étranglement; mais ceux-ci, après avoir atteint un degré plus ou moins marqué, quoique toujours assez petit, demeuraient stationnaires, sans progresser ni s'effacer. Ce phénomène, qui paraissait inexplicable, m'a beaucoup embarrassé, jusqu'à ce que je m'en fusse rendu raison de la manière suivante :

Quand les densités des deux liquides sont bien égales, un cylindre réalisé en deçà de sa limite doit persister indéfiniment sans aucune altération, quelle que soit sa position dans le liquide alcoolique, qu'il soit horizontal, vertical ou incliné; mais s'il y a entre les densités une différence, même trop faible pour déterminer dans l'huile une tendance visible à monter ou à descendre, si, en outre, l'axe de la figure est légèrement incliné, de sorte que l'un des disques est un peu plus élevé que l'autre, si enfin le cylindre est très-rapproché de sa limite et qu'ainsi les forces qui tendent à maintenir sa forme n'aient qu'une intensité extrêmement petite, on comprend que l'infériorité ou l'excès de densité de l'huile portera celle-ci en plus grande quantité du côté du disque le plus haut ou le plus bas, et que dès lors la figure présentera un renflement et un étranglement. Toutefois, comme il ne s'agit ici que de différences très-minimes entre les densités des liquides et entre les hauteurs des disques, ce transport de l'huile ne sera pas assez abondant pour que la figure atteigne l'onduloïde instable (§ 396) correspondant à sa longueur; la transformation ne pourra donc s'effectuer, et la petite altération du cylindre demeurera stationnaire.

J'ai confirmé cette explication par l'expérience suivante : les disques étant placés à la distance qui donne le rapport 3,11, et un cylindre étant réalisé entre eux, on a incliné quelque peu l'appareil de manière que l'un des disques fût d'environ un millimètre plus bas que l'autre, et en même temps on a donné au mélange alcoolique un excès de densité suffisant pour obliger le cylindre à s'infléchir en formant un arc d'une courbure sensible, quoique petite, dont la convexité regardait le haut; on a vu bientôt se produire un étranglement et un renflement, celui-ci s'appuyant sur le disque le plus élevé. On a établi ensuite une même inclinaison du système en sens inverse, on a effacé l'étranglement et le renflement, et on les a vus se développer de nouveau, le renflement s'appuyant sur l'autre disque. Enfin on a rendu, au contraire, la densité du mélange alcoolique un peu trop faible, ce qui arquait légèrement la figure dans le sens opposé au précédent, et le renflement s'est montré alors vers le disque le plus bas.

J'ajouterai que, dans les trois expériences rappelées au commencement de ce paragraphe, c'est-à-dire dans les trois dernières du § 400, quand la figure présentait l'altération stationnaire dont j'ai parlé, et qu'on l'avait abandonnée à elle-même pendant plusieurs minutes, on reconnaissait en général, par une légère flexion de l'ensemble, une différence entre les densités; cette différence, d'abord trop minime pour déterminer un effet sensible à l'œil, s'était peu à peu accrue, soit par une variation de la température, soit par l'action chimique mutuelle des deux liquides, action qu'il est impossibe d'annuler complétement

Enfin je rappellerai que, dans la formation des cylindres laminaires verticaux, on voit (§ 112) l'influence du poids de la lame renfler la figure dans sa moitié inférieure et l'étrangler dans sa moitié supérieure, quand le rapport entre l'écartement et le diamètre des anneaux commence à approcher de celui qui correspond à la limite de la stabilité du cylindre.

Il résulte de tout cela que, si l'on répète mes expériences sur la limite de la stabilité du cylindre, il faudra donner le plus grand soin à la parfaite horizontalité de l'axe des figures.

§ 403. Les résultats des cinquième, sixième et septième expériences, effectuées en deçà de la limite, et celui de la quatrième, effectuée à la limite même, achèvent d'établir le fait sur lequel j'ai basé la recherche de la valeur théorique de cette limite, fait consistant (§ 396) en ce que l'onduloïde instable correspondant à un cylindre stable s'approche d'autant plus de ce cylindre que celui-ci est plus voisin de la limite. En effet, l'ensemble de ces résultats donne, entre la longueur et le diamètre, la suite de rapports 3,09, 3,11, 3,13, 3,14, qui se termine au rapport limite, et donne en même temps, pour les flèches respectives du renflement de l'onduloïde instable, 3^{mm}, 2^{mm} et une fraction, 1^{mm} et une fraction, 0^{mm}.

§ 404. Supposons un cylindre réalisé ainsi un peu en deçà de sa limite de stabilité, et dans lequel on produit, par la manœuvre indiquée, un renflement et un étranglement. Puisque c'est nécessairement d'un onduloïde que part le progrès spontané de la déformation, on comprend que si, au moment où ce progrès spontané va commencer, le renflement et l'étranglement avaient, par suite de l'opération artificielle qui les a constitués, une forme et un rapport de longueur autres que ceux qui conviennent à l'onduloïde, ils prendraient immédiatement d'eux-mêmes cette dernière forme et ce dernier rapport. Maintenant rappelons de nouveau que cet onduloïde s'écarte d'autant moins du cylindre originaire que celui-ci est plus près de sa limite, et coïncide avec lui à la limite même; rappelons, en outre (quatrième expérience du § 400), qu'à cette limite le cylindre, qui se déforme spontanément, se partage toujours en une seule portion renflée et une seule portion étranglée, et nous conclurons de tout cela que, dans un cylindre à sa limite de stabilité, la transformation s'effectue invariablement comme si elle avait pour origine un onduloïde infiniment peu différent de ce cylindre et composé d'un seul renflement et d'un seul étranglement.

L'équation [5] du § 397 montre que la ligne méridienne de la figure est alors une sinusoïde, d'où résulte cette seconde conclusion qu'à la naissance de la transformation du cylindre dont il s'agit, le renflement et l'étranglement sont rigoureusement égaux en longueur.

§ 405. Dans le § 373, je suis arrivé à la conclusion qu'un cylindre indéfini, entièrement libre sur toute sa surface, et formé d'un liquide absolument exempt de viscosités, se transformerait très-probablement de manière que chacune des divisions, et, par suite, l'ensemble d'un renflement et d'un étranglement, aurait la longueur qui correspond à la limite de la stabilité.

Mais, d'une part, j'ai montré (§ 371) que, toujours dans la transformation régulière d'un cylindre indéfini ou d'une grande longueur, les modifications de forme s'accomplissent dans chacun de ces couples comme s'il était terminé par des bases solides ; et, d'autre part, nous venons de voir (§ précédent) qu'à l'origine de la transformation d'un couple isolé ayant la longueur correspondante à la limite de la stabilité, la figure constitue un onduloïde partiel infiniment peu différent du cylindre ; la même chose aura donc lieu, à l'origine de la transformation d'un cylindre indéfini, dans tous les couples qui se forment, s'ils ont la longueur ci-dessus, et toutes ces portions identiques d'onduloïde se raccordant entre elles puisque chacune se compose d'un renflement entier et d'un étranglement entier, la figure totale constituera un onduloïde indéfini.

Si donc on se place dans les conditions théoriquement les plus simples, c'est-à-dire si l'on suppose le liquide sans aucune viscosité, la longueur du cylindre infinie ou seulement multiple exact de celle qui correspond à la limite de la stabilité, la surface convexe entièrement libre, et toute cause étrangère de trouble écartée, enfin si l'on imagine que le cylindre ait de très-petites imperfections de forme, imperfections sans lesquelles il persisterait puisqu'il constitue une figure d'équilibre, on doit croire que la transformation s'effectuera comme si elle partait d'un onduloïde infiniment peu différent de ce cylindre.

Dans ce cas, d'après la remarque qui termine le paragraphe précédent, la longueur initiale des renflements est rigoureusement égale à celle des étranglements. S'il y a des résistances, les renflements et les étranglements sont plus allongés, et conséquemment la figure originaire ne peut plus être un onduloïde; mais alors encore, ainsi qu'on le verra (§ 423), les renflements et les étranglements initiaux sont très-probablement égaux en longueur.

§ 406. Il est d'ailleurs assez facile de faire comprendre à quoi tient l'influence des résistances sur la longueur des renflements et des étranglements; l'examen de cette question contribuera en même temps à rendre plus nettes nos idées sur le jeu des pressions capillaires dans l'acte de la transformation spontanée.

Admettons qu'à l'origine d'une transformation régulière, quand on considère les renflements et les étranglements comme infiniment peu prononcés, les premiers sont réellement égaux en longueur aux seconds; alors, quelle que soit la vraie nature de la ligne méridienne, elle constituera une courbe analogue à la sinusoïde. Raisonnons en supposant que ce soit une sinusoïde même. Si nous désignons par r le rayon du cylindre, par β la flèche des arcs, par l la longueur de la corde de chacun de ceux-ci, que nous prenions pour axe des abscisses l'axe du cylindre, et que nous fassions passer l'axe des ordonnées par le point d'où part l'un des arcs convexes, l'équation de notre sinusoïde sera évidemment

$$y = r + \beta \sin \frac{\pi}{l} x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [1].$$

Prenons sur cette courbe deux points appartenant l'un à un arc convexe, l'autre à un arc concave, et placés de la même manière sur ces deux arcs, c'est-à-dire à des distances égales des origines respectives de ces mêmes arcs. Si, pour abréger, nous représentons par γ le terme

$\beta \sin \frac{\pi}{l} x$ de notre équation, la valeur de γ sera la même, au signe près, pour les deux points, de sorte que les ordonnées de ceux-ci seront respectivement $r + \gamma$ et $r - \gamma$, ce qui donne, d'après la formule connue, pour les valeurs des deux normales, $(r + \gamma)\sqrt{1 + p^2}$ et $(r - \gamma)\sqrt{1 + p^2}$, où p est, comme toujours, le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$; il faut remarquer que, par la nature de la figure liquide, ces normales sont l'une et l'autre positives ; on devra se souvenir en outre, pour l'intelligence des formules qui suivent, que la quantité γ, ou $\beta \sin \frac{\pi}{l} x$, est prise en elle-même, et par conséquent est essentiellement positive. Quant au rayon de courbure, il est clair que sa valeur est, au signe près, la même pour les deux points; si donc q désigne le coefficient différentiel du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2}$, on aura, aussi d'après l'expression connue, pour le rayon de courbure au premier point, $+\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$ et au second point $-\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$.

La pression capillaire correspondante au premier point et rapportée à l'unité de surface sera conséquemment, en vertu de la formule que j'ai si souvent rappelée,

$$P + \frac{A}{2}\left\{\frac{1}{(r + \gamma)\sqrt{1 + p^2}} + \frac{q}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

et la pression correspondante au second point sera

$$P + \frac{A}{2}\left\{\frac{1}{(r - \gamma)\sqrt{1 + p^2}} - \frac{q}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}\right\},$$

P étant toujours la pression d'une surface plane, et A une constante positive dont la valeur dépend de la nature du liquide.

Retranchons la première de ces expressions de la seconde; nous aurons ainsi, pour l'excès de la pression du point de l'arc concave sur celle du point de l'arc convexe,

$$\frac{A}{\sqrt{1+p^2}}\left\{\frac{\gamma}{r^2-\gamma^2}-\frac{q}{1+p^2}\right\}.$$

Puisque nous avons supposé la déformation infiniment peu prononcée, la tangente p est partout infiniment petite, ce qui permet de remplacer $\sqrt{1+p^2}$ par $1+\frac{1}{2}p^2$. Faisant cette substitution et effectuant les calculs, il vient :

$$A\frac{\gamma+\gamma p^2-qr^2+q\gamma^2}{r^2-\gamma^2+\frac{3}{2}r^2p^2-\frac{3}{2}\gamma^2p^2+\frac{1}{2}r^2p^4-\frac{1}{2}{}^2p^4}.$$

Négligeant les termes en p^2, γ^2, p^4, qui sont des infiniment petits d'ordres supérieurs, l'expression se réduit à

$$A.\frac{\gamma-qr^2}{r^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [2].$$

Reste à substituer dans cette expression les valeurs de γ et de q. Les deux différentiations successives de l'équation [1] donnent $q=-\frac{\beta\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi}{l}x$; mais comme nous avons affecté les quantités des signes propres qui dépendent des parties de la courbe auxquelles ces quantités appartiennent, il faut ici faire abstraction du signe négatif; et, en effet, si nous voulions remplacer, dans les expressions des deux pressions, la valeur générale $\frac{q}{\{1+p^2\}^{\frac{3}{2}}}$ de l'inverse du rayon de courbure par sa valeur relative à notre sinusoïde, nous ne pourrions laisser à celle de q le signe — amené par la différentiation, qu'en choisissant ce même signe entre les deux dont le dénominateur peut être affecté à cause de l'exposant $\frac{3}{2}$, sans quoi les termes qui représentent les inverses des rayons de courbure n'auraient plus, dans les expressions dont il s'agit, les signes qui conviennent à la question; or cela revient à faire abstraction de ces signes et à prendre q et le dénominateur d'une manière absolue. Substituant donc, dans l'expression [2], à γ et à q leurs valeurs absolues respectives $\beta \sin \frac{\pi}{l} x$ et $\frac{\beta^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi}{l} x$, on obtient enfin, pour la mesure de la différence des pressions correspondantes à deux points semblablement situés l'un sur un arc convexe et l'autre sur un arc concave,

$$A \left\{ \frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{l^2} \right\} \beta \sin \frac{\pi}{l} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [3].$$

Dans cette expression, les facteurs A et $\beta \sin \frac{\pi}{l} x$ sont, nous le savons, essentiellement positifs, de sorte que le signe de la quantité totale dépendra de celui du facteur $\frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{l^2}$; la différence des pressions sera donc positive si l'on a

$$\frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{l^2} > 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$2l > 2\pi r,$$

c'est-à-dire si la somme des longueurs d'un renflement et d'un étranglement excède la circonférence du cylindre originaire, et cela dans toute l'étendue des arcs, sauf à leurs extrémités mêmes, où le facteur $\beta \sin \frac{\pi}{l} x$ s'évanouit. On voit, de plus, que la différence dont il s'agit augmente à partir de ces extrémités jusqu'aux milieux des arcs. Ainsi, en premier lieu, quand un cylindre réalisé entre deux bases solides dépassera la limite de la stabilité, mais aura assez peu de longueur pour ne donner qu'un seul renflement et un seul étranglement, la pression correspondante à un point quelconque de l'arc méridien de l'étranglement l'emportera sur celle qui appartient au point semblablement placé de l'arc méridien du renflement.

Considérons maintenant un second cylindre de même diamètre et formé du même liquide, mais plus long, toujours avec la condition qu'il ne s'y produise qu'un seul couple, et supposons une déformation de même degré, c'est-à-dire dont le renflement et l'étranglement aient la même flèche que dans la première figure ; nous passerons ainsi d'une sinusoïde à une autre plus allongée, mais de même flèche, ce qui revient à augmenter l sans changer β non plus que r et A. Si nous prenons respectivement sur ces deux sinusoïdes deux points homologues, ou tels que leurs abscisses soient entre elles comme les cordes des arcs, le rapport $\frac{x}{l}$ sera le même pour ces deux points, et conséquemment le facteur $\beta \sin \frac{\pi}{l} x$ de l'expression [3] aura la même valeur, ainsi que A; mais le facteur $\frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{l^2}$ augmentera en passant du point de la première figure au point de la seconde, et d'autant plus qu'on aura donné à l un plus grand accroissement. La prédominance des pressions capillaires de tous les points de l'étranglement sur celles des points du renflement est donc d'autant plus forte que le couple est plus allongé ; et comme nous pouvons appliquer à chacun des couples formés dans la transformation d'un cylindre d'une grande longueur ce que nous venons de trouver à l'égard d'un couple isolé, il en résulte que, dans la transformation d'un semblable cylindre, plus les renflements et les étranglements sont allongés, plus les forces qui font progresser le phénomène sont intenses. D'après cela, lorsque, dans un cylindre indéfini ou d'une longueur considérable, la transformation est gênée par des résistances soit extérieures, soit intérieures, ces résistances, à moins qu'elles ne soient trop énergiques, pourront être surmontées par un allongement des couples ; or on conçoit que la transformation se dispose d'elle-même de manière à produire cet effet, et qu'elle allonge d'autant plus les couples que les résistances opposent plus d'obstacle.

A la vérité, le calcul ci-dessus est basé sur la supposition qu'à l'origine du phénomène, la ligne méridienne est une sinusoïde; mais, ainsi que je l'ai fait remarquer, si, en réalité, elle n'est pas telle, elle a bien probablement beaucoup d'analogie avec cette courbe, à laquelle elle se réduit d'ailleurs, nous le savons, quand les couples ont la longueur correspondante à la limite de la stabilité; si l'on en connaissait la nature exacte, et qu'on lui appliquât le calcul précédent, on parviendrait sans aucun doute au même résultat.

§ 407. D'abord, en effet, on y arrive par les considérations exposées dans le §381, considérations d'où il résulte a priori que lorsqu'un cylindre réalisé entre deux bases solides a une longueur assez petite pour ne donner qu'un seul couple, il doit se transformer d'autant plus rapidement que sa longueur excède davantage la limite de la stabilité; et puisque, dans la transformation régulière d'un cylindre indéfini ou d'une grande longueur, les choses se passent à l'égard d'un couple quelconque comme s'il était terminé par des bases solides, il s'ensuit que, dans un cylindre indéfini ou d'une grande longueur, la transformation sera aussi d'autant plus rapide que les couples seront plus allongés; mais une transformation plus rapide suppose des forces plus intenses; les différences de pression dont il a été question dans le paragraphe précédent angmentent donc avec la longueur des couples.

En outre, on peut recourir à des vérifications expérimentales : il suffit, pour cela, d'après ce que je viens de dire, de réaliser, avec le même liquide, des cylindres de même diamètre dépassant de plus en plus leur limite de stabilité, et de compter, pour chacun d'eux, la durée de la transformation. Or c'est ce qui a été effectué en même temps que les expériences du § 400 : dans les trois premières, après avoir observé le point où la figure commençait à s'altérer spontanément, on a continué l'extraction du liquide, jusqu'à ce que, en employant la petite manœuvre indiquée dans la note du § 359, c'est-à-dire en régularisant constamment la figure au moyen du bec de la seringue, on eût atteint la forme cylindrique; puis on a abandonné la figure à elle-même, et l'on a compté, avec une montre ordinaire, la durée approximative de la transformation; on a estimé aussi cette durée dans la quatrième expérience, où le cylindre était à sa limite de stabilité. On a trouvé ainsi : pour le rapport limite 3,14 entre la longueur et le diamètre, une durée de 11 minutes; pour le rapport 3,18, une durée de 4 minutes ; pour le rapport 3,3, une durée de 2 minutes; et, pour le rapport 3,6, une durée de 1 minute.

En répétant la quatrième expérience, il est arrivé plusieurs fois que la durée a été seulement de 5 à 7 minutes; mais on voit qu'elle était toujours supérieure à toutes les autres.

§ 408. Si, dans l'expression [3] du § 406, on a $\frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{l^2} < 0$, d'où $2l < 2\pi r$, ce qui la rend négative, on conclura du mode de raisonnement employé, que les pressions capillaires de tous les points de l'étranglement seront inférieures à celles des points du renflement, et d'autant plus que le couple sera plus court. Dans ce cas, par conséquent, si le couple est unique et terminé à deux bases solides, la masse liquide tendra à regagner la figure cylindrique; en d'autres termes, le cylindre formé entre les bases dont il s'agit sera stable, et sa stabilité sera d'autant plus prononcée que sa longueur sera moindre.

Enfin si l'on a $\frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{l^2} = 0$, d'où $2l = 2\pi r$, la différence des pressions est nulle dans toute l'étendue du couple, de sorte que, s'il n'y a qu'un seul couple compris entre des bases solides, la masse ne tendra ni à revenir à la figure cylindrique, ni à s'en éloigner davantage; le cylindre formé entre ces bases sera donc alors à sa limite de stabilité, comme nous le savions d'ailleurs.

Cette manière d'arriver à la limite de la stabilité du cylindre n'est autre chose, on le voit, que la méthode de M. Hagen (§ 394), mais corrigée en substituant aux arcs de cercle des arcs de sinusoïde, et en évaluant les pressions dans toute la longueur de ces arcs, au lieu de le faire à leurs sommets seulement.

§ 409. Occupons-nous actuellement de l'onduloïde. Les conditions de stabilité de cette figure changent, on l'a vu (§ 388), suivant que son milieu est occupé par un étranglement ou par un renflement. L'application d'une méthode théorique au premier cas serait sans doute bien difficile; mais il n'en est pas de même à l'égard du second :

Quand on réalise un onduloïde partiel de cette seconde espèce en faisant adhérer, au sein du mélange alcoolique, une masse d'huile à la surface convexe d'un cylindre solide préalablement frotté d'huile (§ 47), il est évident que la surface de cette masse ne peut, à ses extrémités, former un angle avec la mince couche d'huile qui mouille la surface solide au delà de ces mêmes extrémités, et qu'ainsi la surface de la figure doit venir lécher la couche dont il s'agit, d'où il suit que la ligne méridienne se termine précisément aux minima de distance à l'axe; or, nous le savons, l'onduloïde ainsi réalisé est stable, et on en tire cette conclusion rigoureuse que la limite de la stabilité n'est point en deçà des cercles de gorge des deux étranglements. Il faut maintenant démontrer qu'elle n'est pas non plus au delà.

Pour cela, reprenons la réalisation de notre onduloïde entre les deux petits disques (§ 52); laissons à la masse d'huile un excès suffisant pour que les derniers éléments de la ligne méridienne n'aient pas encore atteint le parallélisme réel ou apparent avec l'axe, mais n'en soient pas très-éloignés (*fig.* 100); cet onduloïde sera conséquemment stable. Poussons alors légèrement l'huile avec le bec de la petite seringue vers l'un des disques; nous diminuerons ainsi ou nous effacerons entièrement la portion d'étranglement qui était du côté de ce disque, tandis que nous rendrons plus prononcée la portion d'étranglement aboutissant à l'autre disque. Or il est clair que les choses se passeront ici comme à l'égard du cylindre; c'est-à-dire que si la déformation artificielle ne dépasse pas un certain degré, la figure abandonnée à elle-même reprendra sa forme originaire, mais que, si l'on va au delà de ce degré, elle continuera spontanément à s'altérer dans le même sens, jusqu'à sa désunion complète. Il y a donc ici également, à ce degré précis de déformation, une figure d'équilibre instable (§ 396); et comme, pendant la

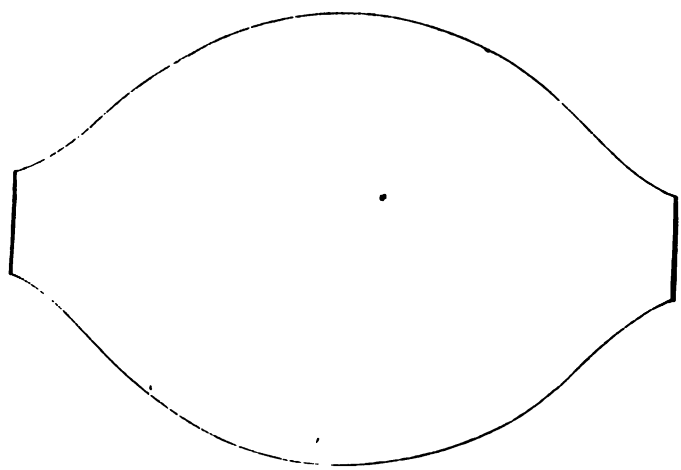

Fig. 100.

déformation artificielle et la déformation spontanée subséquente, la figure d'huile se maintiendra toujours de révolution et que sa ligne méridienne présentera toujours au moins un point d'inflexion, la figure d'équilibre instable dont il s'agit est nécessairement un autre onduloïde.

Cet onduloïde instable, que, pour abréger le langage, nous appellerons l'*onduloïde conjugué*, sera, d'après ce qui précède, dissymétrique par rapport au milieu de l'intervalle des deux disques, c'est-à-dire aura son renflement plus rapproché de l'un de ces disques que de l'autre (*fig.* 101). Enfin ce même onduloïde s'écartera évidemment d'autant moins de l'onduloïde originaire que celui-ci était plus près de sa limite de stabilité, et, à cette limite, coïncidera exactement avec lui.

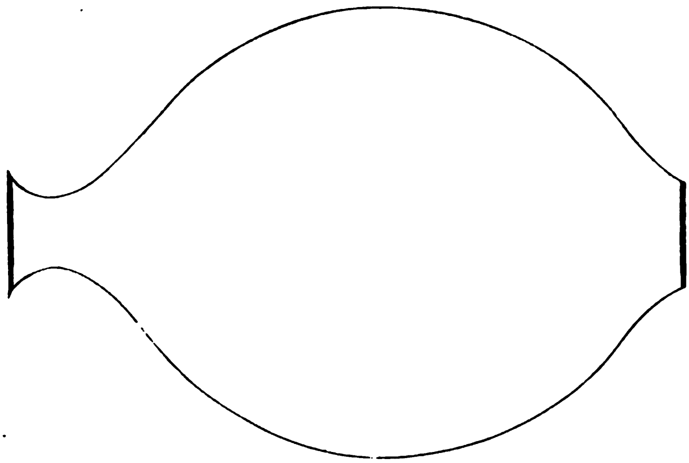

Fig. 101.

Maintenant remarquons que, d'après le mode de génération de la ligne méridienne de l'onduloïde par le foyer

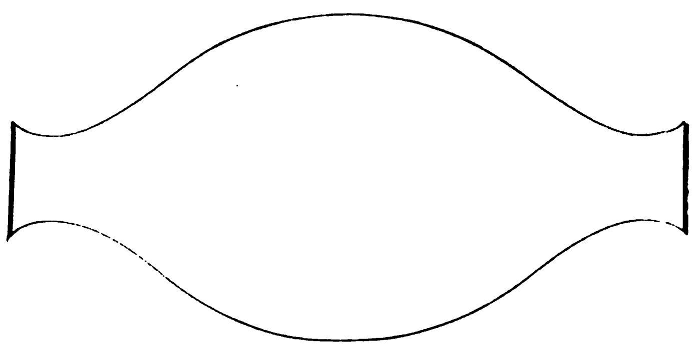

Fig. 102.

d'une ellipse roulante (§ 82), cette ligne est nécessairement d'une symétrie parfaite des deux côtés d'un maximum de distance à l'axe, et qu'ainsi, dans un onduloïde indéfini, il y a symétrie rigoureuse des deux côtés de l'équateur d'un renflement. Il suit de là que si l'on comprend entre deux disques égaux un renflement d'onduloïde avec des portions des deux étranglements adjacents, et si ces portions dépassent l'une et l'autre leurs cercles de gorge respectifs (*fig.* 102), les deux disques sont rigoureusement à égale distance de la section équatoriale du renflement. Pour que cette section n'occupe pas le milieu précis de l'intervalle des disques, il faut évidemment que l'un des étranglements dépasse son cercle de gorge, et que l'autre n'atteigne pas le sien ; c'est donc là le cas de l'onduloïde conjugué (*fig.* 101); dans cet onduloïde, un seul des deux étranglements présente un cercle de gorge.

Ces principes établis, concevons un onduloïde de l'espèce considérée dans ce paragraphe, et précisément à sa limite de stabilité; imaginons-le mathématiquement parfait, en sorte qu'il se maintienne, et supposons que ses étranglements dépassent leurs cercles de gorge, de manière qu'il soit analogue à celui de la *fig.* 102. Ajoutons-y une très-petite quantité de liquide, ce qui en fera une figure stable, mais voisine de sa limite. Puisque nous sommes maîtres du volume ajouté, nous pouvons le prendre assez minime pour que l'onduloïde stable produit diffère aussi peu que nous le voudrons de l'onduloïde primitif, et conséquemment pour que l'onduloïde instable conjugué diffère lui-même aussi peu que nous le voudrons de cet onduloïde primitif; si donc celui-ci, c'est-à-dire l'onduloïde à sa limite de stabilité, s'étendait au delà des cercles de gorge de ses étranglements, nous pourrions toujours, par une addition de liquide suffisamment petite et un transport minime du renflement vers l'un des disques, arriver à un onduloïde conjugué dont les étranglements dépasseraient encore tous deux leurs cercles de gorge respectifs; or, d'après ce que j'ai démontré plus haut, cela est incompatible avec la nature de l'onduloïde conjugué. Notre onduloïde à sa limite de stabilité ne peut donc se terminer au delà des cercles de gorge de ses étranglements, et puisqu'il ne peut non plus, comme je l'ai fait voir au commencement de ce paragraphe, se terminer en deçà, il se termine bien réellement à ces cercles mêmes, ainsi que l'expérience me l'avait indiqué.

J'ajouterai que M. Lindelöf, à qui j'ai communiqué ce résultat, m'a dit y être arrivé de son côté par le calcul; l'expérience, le raisonnement et l'analyse s'accordent donc pour l'établir.

§ 410. Je puis actuellement exposer la méthode annoncée à la fin du § 397, par laquelle je parviens sans aucun calcul à la valeur exacte de la limite de stabilité du cylindre.

Il suit de la génération des lignes méridiennes, que la portion de la ligne méridienne de l'onduloïde comprise entre un minimum de distance à l'axe et le minimum suivant, correspond à une révolution entière de l'ellipse roulante; donc l'onduloïde partiel engendré par cette portion, c'est-à-dire l'onduloïde à sa limite de stabilité, a une longueur égale à la périphérie de l'ellipse dont il s'agit; or, quand cette ellipse devient un cercle, l'onduloïde devient un cylindre, et conséquemment celui-ci, à sa limite de stabilité, a une longueur égale à la circonférence du cercle roulant; mais cette circonférence est évidemment égale à celle du cylindre; donc le cylindre limite a une longueur égale à sa propre circonférence; donc enfin, dans un semblable cylindre, le rapport de la longueur au diamètre a pour valeur exacte la quantité π.

§ 411. On a vu (§ 387) que le caténoïde de hauteur maxima est bien réellement à sa limite de stabilité, et nous savons aussi que lorsqu'on le réalise à l'état laminaire, il se convertit en deux lames planes dès qu'on atteint cette hauteur maxima ; or, en conséquence du calcul de Goldschmidt (§ 80), à cette même hauteur maxima, le rapport de l'écartement des bases à leur diamètre est égal à 0,6627. En employant certaines précautions, j'ai pu soumettre à une vérification expérimentale cette valeur précise.

Pour cela, j'ai substitué aux anneaux en fil de fer deux bandes de fer ployées cylindriquement, d'un centimètre de hauteur et de deux millimètres d'épaisseur, ayant leurs bords en regard taillés extérieurement en biseau sous un angle d'environ 45°, de manière que les arêtes de ces deux biseaux, arêtes d'où devait partir la lame, fussent tranchantes. Ces deux bandes ou anneaux étaient façonnés au tour; le diamètre des circonférences formées par chacune des arêtes ci-dessus a été trouvé exactement le même pour les deux (1), et égal à $71^{mm},02$. La *fig*. 103 représente, en grandeur réelle, la coupe verticale du côté gauche du système. Ces mêmes anneaux étaient portés comme les anneaux en fil de fer, savoir l'inférieur par trois petits pieds et le supérieur par une fourche; seulement ces pieds et cette fourche étaient plus solides. De même que dans les expériences des §§ 110 à 114, la tige verticale à laquelle

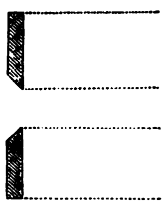

Fig. 103.

(1) On a mesuré ces diamètres au moyen du cathétomètre, en plaçant pour cela les anneaux dans une position verticale.

on devait visser la queue de la fourche s'adaptait, à l'aide d'une pièce intermédiaire convenable, à l'extrémité de la lunette d'un cathétomètre; on pouvait ainsi élever bien verticalement l'anneau supérieur, et en même temps mesurer avec exactitude la quantité dont son arête tranchante s'était séparée de celle de l'anneau inférieur.

Les choses étant ainsi disposées, on a procédé de la manière suivante : on a posé, par ses pieds, l'anneau inférieur sur une tablette à vis calantes et sous l'anneau supérieur soutenu, comme je l'ai dit, par le cathétomètre; on a rendu bien horizontale l'arête du premier, au moyen des vis calantes et d'un petit niveau à bulle d'air; on a descendu ensuite le second, et, à l'aide d'une pince, on a courbé légèrement la queue de la fourche dans un sens ou dans un autre, en faisant glisser en même temps, de petites quantités, l'anneau inférieur sur la tablette, jusqu'à ce que les deux arêtes fussent exactement superposées. Alors, après avoir remonté l'anneau supérieur, on a mouillé de liquide glycérique les bords en biseau des deux anneaux, en se servant pour cela d'un pinceau, puis on a abaissé de nouveau l'anneau supérieur jusque très-près de l'autre, et l'on a rempli du même liquide la rainure circulaire formée par les deux biseaux, en y promenant le pinceau bien imbibé. Cela fait, on a soulevé l'anneau supérieur jusqu'à un millimètre environ en deçà de la quantité qu'indiquait la théorie, et qu'on avait préalablement déterminée; puis on a fait agir, avec des ménagements extrêmes, la vis du mouvement graduel, en s'arrêtant au moment précis de la rupture de l'équilibre, c'est-à-dire à l'instant où la figure se resserre rapidement pour se désunir en son milieu et se convertir en deux lames planes, comme avec les anneaux en fil de fer.

Le diamètre des bords tranchants étant, ainsi que je l'ai indiqué plus haut, de $71^{mm},02$, on devait avoir (§ 80), pour la hauteur du caténoïde limite et conséquemment pour l'écartement de ces bords correspondant à la rupture de l'équilibre, $71^{mm},02 \times 0,6627 = 47^{mm},06$. Or, sur sept fois qu'on a effectué l'expérience, la lecture au cathétomètre a donné six fois identiquement la même valeur, savoir $46^{mm},97$, et une fois $46^{mm},92$ qui s'écarte à peine de la précédente. On doit donc regarder la valeur $46^{mm},97$ comme étant celle que donne l'expérience; elle ne diffère de la valeur théorique $47^{mm},06$ que de $0^{mm},09$, quantité qui n'atteint pas les deux millièmes de cette valeur théorique.

J'appellerai ici l'attention sur une autre vérification de la théorie. Nous avons vu (ibid.) que, d'après les calculs de Goldschmidt, lorsque l'écartement des bases excède la limite, il n'y a plus, comme surface de révolution à courbure moyenne nulle s'appuyant sur ces bases, que deux plans qui les occupent respectivement; or nous savons en effet, par l'expérience ci-dessus et par celles des §§ 111 et 222, qu'au moment où, par l'écartement graduel des anneaux, on atteint la limite théorique soit exactement, soit à fort peu près, le caténoïde laminaire compris entre eux se transforme spontanément en deux lames planes.

La discussion contenue dans le § 78 et le théorème de M. Delaunay (§ 82) complété par M. Lamarle (§ 83) ont, du reste, montré, depuis, que, parmi les surfaces de révolution, le caténoïde et le plan sont les seules à courbure moyenne nulle.

Rappelons ici que le caténoïde limite est défini (§ 80) par cette propriété simple, que les points extrêmes de sa chaînette méridienne sont ceux dont les tangentes prolongées iraient également toucher la chaînette méridienne opposée, ou, ce qui revient au même, se couperaient au centre de la figure.

On a vu encore (§ 89) que le caténoïde en question jouit de cette autre propriété simple, que son volume est la moitié de celui du cylindre de même base et de même hauteur, propriété que nous avons également vérifiée par l'expérience (§ 90).

Enfin ce même caténoïde possède une dernière propriété, celle d'être unique; nous savons, en effet, que, pour tout écartement des bases inférieur à l'écartement limite, il y a toujours deux caténoïdes possibles s'appuyant sur ces bases et pénétrant inégalement entre elles, caténoïdes qui diffèrent d'autant moins l'un de l'autre qu'on approche davantage de la limite, et dont le moins rentré est le seul stable.

§ 412. Nous aurions encore à chercher, par la théorie, les limites précises de stabilité du nodoïde dans les différents cas examinés aux §§ 389 et 390; mais ici, comme à l'égard de l'onduloïde partiel étranglé, les principes que nous avons appliqués au cylindre et à l'onduloïde partiel renflé ne sauraient être employés. Il en est de même quant aux figures mentionnées au § 393.

§ 413. Essayons maintenant de pénétrer plus avant dans l'essence des phénomènes.

Concevons une figure d'équilibre liquide réalisée dans un système solide, et mathématiquement parfaite; alors la pression capillaire sera rigoureusement la même en tous les points de la couche superficielle, et la figure, quelle que soit son étendue, se maintiendra tant qu'une cause extérieure ne viendra point la troubler. Supposons qu'on lui imprime artificiellement une déformation très-petite; ainsi altérée, elle cessera en général d'être une figure d'équilibre, et dès lors les pressions respectivement correspondantes aux différents points de sa couche superficielle ne seront plus exactement égales; si donc on l'abandonne à elle-même, elle tendra à quitter ce nouvel état. Cela posé, deux cas sont possibles : savoir que la figure tende à revenir à sa première forme, ou bien qu'elle tende à s'en éloigner davantage. Si le premier cas a lieu quelle que soit la nature de la petite déformation, la figure est stable; si, au contraire, le second cas se présente soit pour une petite déformation quelconque, soit pour une petite déformation d'une nature déterminée, la figure est instable.

Mais on peut envisager la stabilité et l'instabilité des figures liquides sous un autre point de vue, également général, dont l'idée m'a été suggérée par un passage de l'un des Mémoires de Beer, passage que je reproduis plus bas.

Les géomètres ont admis, comme résultat de l'analyse, que les surfaces représentées par l'équation $\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=C$, c'est-à-dire les surfaces dont la courbure moyenne est constante, sont aussi celles qui, renfermant un volume donné, ont une étendue minima. Mais s'il fallait accepter ce principe sans restriction, il s'ensuivrait que toute figure d'équilibre liquide partielle terminée à un système solide serait nécessairement stable, quelque portion qu'elle représentât de la figure complète à laquelle elle appartient : l'onduloïde, par exemple, conserverait toute sa stabilité avec un nombre quelconque de renflements et d'étranglements entre ses deux bases solides.

En effet, la couche superficielle de la masse étant réellement, nous le savons (chap. V), dans un état de tension, elle fait constamment effort pour se resserrer;

si donc, dans l'état d'équilibre, son étendue était toujours un minimum, une déformation très-petite quelconque augmenterait cette étendue, et conséquemment la couche superficielle ferait effort pour reprendre ses dimensions premières et rétablir la forme d'équilibre. Aussi Beer cherche à modifier le principe énoncé par les géomètres : dans le second des deux Mémoires qu'il a publiés sur mes expériences(1), il s'exprime de la manière suivante :

« Un liquide à l'état d'équilibre et soustrait à toute influence étrangère jouit de cette propriété que la variation de sa surface est toujours nulle..... cette surface est donc de la nature de celles qu'on nomme minimæ ou maximæ areæ; or, à une surface maximæ areæ correspondra évidemment un équilibre instable, tandis qu'à une surface minimæ areæ correspondra un équilibre stable. »

Cependant, si l'on réfléchit, on se convaincra sans peine qu'une surface renfermant un volume donné ne saurait constituer un maximum d'une manière absolue, car on pourrait toujours trouver des modes de petite déformation qui l'augmenteraient : si l'on imagine, par exemple, que la figure se sillonne de cannelures telles que la somme de celles qui sont en creux par rapport à la surface primitive soit égale en volume à la somme de celles qui sont en relief, de façon que le volume total n'ait pas changé, il est clair que la surface aura reçu par là un accroissement notable, quelque ténues qu'on suppose les cannelures en question. C'est, sans doute, pour ce motif que les géomètres ont considéré les surfaces à courbure moyenne constante comme ayant toujours chacune un minimum d'étendue.

(1) Voir la troisième note du § 398.

L'expérience vient d'ailleurs confirmer cette impossibilité d'un maximum absolu, et c'est elle, en outre, qui nous donnera la solution des difficultés ci-dessus :

Quand on a réalisé entre deux disques, dans le liquide alcoolique, un cylindre d'huile dépassant très-peu sa limite de stabilité, si, avant que la déformation spontanée ait commencé à se montrer, on pousse légèrement le cylindre en son milieu à l'aide d'une spatule recouverte d'étoffe, de manière à fléchir la figure d'une certaine quantité, puis qu'on enlève la spatule, on voit la figure revenir d'elle-même à la forme cylindrique, plus ou moins altérée par la naissance du renflement et de l'étranglement ; d'où il faut conclure qu'un cylindre dépassant sa limite de stabilité est néanmoins stable encore et conséquemment minimæ areæ, par rapport aux déformations qui le fléchiraient. Il résulte de là que la surface d'une figure d'équilibre liquide qui dépasse sa limite de stabilité, est encore minimæ areæ par rapport à certaines déformations, tandis qu'elle est maximæ areæ par rapport à d'autres.

L'expérience montre, de plus, qu'une figure d'équilibre liquide donnée comprise dans un système solide donné, et dépassant sa limite de stabilité, s'altère toujours identiquement de la même manière : le cylindre, par exemple, terminé à deux disques solides, se fractionne toujours en portions renflées alternant avec des portions étranglées, et, quand aucune cause perturbatrice n'intervient, les longueurs respectives des renflements et des étranglements, à une époque quelconque du phénomène, sont toujours les mêmes dans les mêmes conditions de l'expérience ; dans l'onduloïde partiel renflé et compris entre deux disques égaux, le renflement marche toujours vers l'une des bases, de façon que l'un des deux étranglements s'efface par degrés, tandis que l'autre s'approfondit jusqu'à sa désunion ; etc.

Or ces faits paraissent conduire à une seconde conséquence, savoir qu'au delà de la limite de stabilité, ou bien la surface n'est maximæ areæ que par rapport à un seul mode de déformation, ou bien, si elle est maximæ areæ par rapport à plusieurs, il existe certaines conditions qui déterminent le choix de la masse parmi ceux-ci, de façon qu'une seule déformation est susceptible de progresser.

§ 414. Pour rendre plus évidentes encore les déductions qui précèdent, je vais étudier le cylindre au point de vue des variations que subit l'étendue de sa surface quand on altère un peu la forme de celle-ci, sans changer le volume qu'elle renferme; cette figure, en effet, se prête sans trop de peine à un semblable examen.

Concevons un cylindre liquide d'une longueur quelconque par rapport à son diamètre et terminé à deux bases solides, et imaginons qu'on lui imprime une déformation finie, mais très-petite, astreinte à la seule condition que les aires de toutes les sections planes parallèles aux bases solides soient demeurées les mêmes que dans le cylindre. Une telle déformation est admissible, car elle n'altère pas le volume de la masse; figurons-nous, en effet, deux de ces sections infiniment rapprochées; le volume de la tranche liquide qu'elles comprennent sera égal au produit de l'aire de l'une d'elles par la distance qui les sépare, et puisque cette aire est égale à celle d'une section circulaire du cylindre, le volume en question sera égal à celui d'une tranche de même épaisseur appartenant au cylindre; enfin le volume total de la figure étant la somme des volumes de toutes les tranches obtenues en coupant cette figure par un nombre infini de plans infiniment rapprochés et parallèles aux bases, et le nombre de ces tranches étant le même avant et après la déformation, celle-ci, comme je l'ai avancé, n'apporte aucune modification au volume total dont il s'agit.

Considérons actuellement, dans la figure déformée, l'une des tranches ci-dessus. Si les sections qui la comprennent ne sont pas circulaires, leurs périmètres seront plus grands que celui des sections du cylindre, puisque de toutes les courbes planes qui renferment la même aire, la circonférence de cercle est la plus courte; la petite zone superficielle qui unit ces périmètres et qui fait partie de la surface libre de la figure, sera donc, pour cette raison et, en outre, parce qu'elle se compose en général d'éléments obliques aux plans des deux sections, plus grande que la petite zone appartenant à une tranche du cylindre. Si les deux sections sont circulaires, elles seront, par la condition assignée aux aires, identiques à celles du cylindre, mais leurs centres ne seront pas en général exactement en regard l'un de l'autre, de sorte que la petite zone qui unit les deux périmètres se composera aussi d'éléments obliques, et sera encore conséquemment plus grande que celle d'une tranche du cylindre. D'après cela, comme le nombre des tranches est le même dans la figure déformée et dans le cylindre, la somme des surfaces des petites zones de la première l'emportera sur la somme de celles des petites zones du second; donc enfin, ce qui est la même chose, la surface libre de la figure déformée sera plus étendue que celle du cylindre.

Ainsi, de quelque nature que soit la petite déformation, si elle est telle que les aires des sections parallèles aux bases n'aient pas changé, elle augmente l'étendue de la surface libre de la masse; en d'autres termes, la surface du cylindre est un minimum par rapport à toutes les petites déformations de cette espèce.

Parmi ces mêmes déformations, se trouve évidemment celle qui consiste en une simple flexion, et nous avons vu, en effet, qu'un cylindre liquide légèrement fléchi revient spontanément à la forme de révolution.

§ 415. Supposons maintenant une petite déformation qui change les aires des sections parallèles aux bases. Alors, puisque le volume total, ou la somme des volumes de toutes les tranches, est invariable, il faut nécessairement que, parmi les sections, les unes aient des aires plus grandes et les autres des aires plus petites que l'aire d'une section du cylindre ; il faut conséquemment que la figure ait des portions renflées et des portions amincies. Voyons donc si, dans cet état, la surface de la figure doit encore excéder celle du cylindre, ou si elle peut être moindre.

Afin de rendre la question accessible au calcul, imaginons que la figure déformée soit elle-même de révolution, et qu'elle ait pour ligne méridienne une sinusoïde. Comme la déformation doit être supposée finie, bien que très-petite, on comprend que l'axe de cette sinusoïde ne pourra coïncider avec la génératrice du cylindre : pour que le volume soit demeuré le même, les renflements devront saillir moins en dehors de la surface cylindrique primitive que les étranglements ne s'enfoncent en dedans ; l'axe de la courbe sera donc un peu plus rapproché de l'axe de révolution que la génératrice du cylindre ; nous désignerons par μ la petite différence de ces deux distances. Alors, en prenant pour axe des abscisses l'axe de révolution, et en plaçant l'origine au pied de l'ordonnée de l'un des points où la sinusoïde coupe son axe et où commence un arc convexe, si l est la longueur des cordes des arcs, β la flèche de ces mêmes arcs, et r le rayon du cylindre originaire, on trouvera aisément que l'équation de notre sinusoïde est :

$$y = r - \mu + \beta \sin \frac{\pi}{l} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [1].$$

Cherchons d'abord la relation entre μ et β nécessaire pour que le volume n'ait pas changé. Notre figure liquide étant terminée à deux disques solides, supposons que du premier de ces disques parte un renflement, et que sur le second s'appuie un étranglement; nous pourrons alors partager, par des sections de même diamètre que les disques, la figure en un nombre entier de parties égales contenant chacune une portion renflée et une portion étranglée; seulement, par suite de la non-coïncidence entre l'axe de la sinusoïde et la génératrice du cylindre, on comprend que, dans chacun des couples ainsi formés, la portion renflée ne constitue pas un renflement complet, et qu'à l'extrémité de la portion étranglée s'ajoute le commencement du renflement qui la suit. Or tous ces couples étant égaux, et la somme de leurs volumes représentant le volume total de la masse, il s'ensuit que le volume de chacun d'eux est égal à celui de la portion du cylindre primitivement comprise entre les mêmes sections; il suffira donc, pour établir que le volume total n'a pas changé, de chercher l'expression du volume d'un couple, et de l'égaler à celle du volume de la portion correspondante du cylindre.

Mais on peut substituer au couple en question un autre couple terminé par deux sections ayant pour rayon la distance $r - \mu$ de l'axe de la sinusoïde à l'axe de révolution, sections dont la première passe par le point où naît un arc convexe, et dont la seconde passe par celui où finit l'arc concave suivant; on voit, en effet, qu'en agissant ainsi, on ajoute une petite portion à la première extrémité du couple considéré d'abord, mais qu'on retranche à l'autre extrémité une portion identique. Ce nouveau couple se composera ainsi exactement d'un renflement complet et d'un étranglement complet, et se prêtera sans difficulté au calcul.

L'expression générale du volume d'un corps de révolution terminé à deux sections perpendiculaires à l'axe, est, comme on sait, $\pi\int y^2 dx$. Pour l'appliquer à notre couple, il suffira d'y remplacer y par la valeur que donne l'équation [1]; on a de cette manière :

$$\pi\int y^2 dx = \pi\int\left(r-\mu+\beta\sin\frac{\pi}{l}x\right)^2 dx$$

$$=\pi\left\{\left[(r-\mu)^2+\frac{\beta^2}{2}\right]x-\frac{2\beta l}{\pi}(r-\mu)\cos\frac{\pi}{l}x-\frac{\beta^2 l}{4\pi}\sin\frac{2\pi}{l}x\right\}+\text{C}.$$

Prenons maintenant cette intégrale entre les limites du couple en question, c'est-à-dire de $x=0$ à $x=2l$; nous obtiendrons

$$2\pi l\left\{(r-\mu)^2+\frac{\beta^2}{2}\right\}=2\pi r^2 l+\pi l(2\mu^2-4r\mu+\beta^2).$$

Telle est donc l'expression du volume du couple; or celui de la portion de même longueur $2l$ prise dans le cylindre est $2\pi r^2 l$; pour que ces deux volumes soient égaux, il faut conséquemment que l'on ait

$$2\mu^2-4r\mu+\beta^2=0.$$

Résolvant par rapport à μ, il vient :

$$\mu=r\pm\sqrt{r^2-\frac{\beta^2}{2}}.$$

Observant que, comme μ doit être très-petit, il faut prendre le radical avec le signe —, développant ce radical, et négligeant les puissances de β supérieures à la deuxième à cause de la petitesse de cette quantité, on a enfin :

$$\mu = \frac{\beta^2}{4r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [2]$$

C'est la relation cherchée[1] entre μ et β.

Passons à la surface. Celle-ci est, comme on le sait encore, représentée d'une manière générale, dans le cas des corps de révolution, par $2\pi\int y ds = 2\pi\int y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx$; or y est donné par l'équation [1], équation d'où l'on déduit aussi $\frac{dy}{dx} = \frac{\beta\pi}{l}\cos\frac{\pi}{l}x$. On aura donc :

$$2\pi\int y ds = 2\pi\int\left(r - \mu + \beta\sin\frac{\pi}{l}x\right)\sqrt{1+\frac{\beta^2\pi^2}{l^2}\cos^2\frac{\pi}{l}x}\cdot dx.$$

Mais, à cause de la petitesse de β, on peut développer le radical et se borner aux deux premiers termes de la série; avec cette simplification, on trouve :

$$2\pi\int y ds = 2\pi\int\left(r - \mu + \beta\sin\frac{\pi}{l}x\right)\left(1+\frac{\beta^2\pi^2}{2l^2}\cos^2\frac{\pi}{l}x\right)dx.$$

Effectuant la multiplication, négligeant le terme en β^3,

(1) Cette relation montre que si l'on suppose la déformation, et, par suite, la flèche infiniment petite, comme nous l'avons fait dans le calcul du § 406, la quantité μ, c'est-à-dire l'intervalle entre l'axe de la sinusoïde et la génératrice du cylindre, est du deuxième ordre, et conséquemment disparaît devant β; c'est pourquoi, dans le calcul que nous venons de citer, nous avons fait coïncider les deux droites dont il s'agit.

et intégrant aussi entre les limites $x=0$ et $x=2l$, on obtient :

$$2\pi\int_0^u yds = 4\pi l\,(r-\mu)\left(1+\frac{\beta^2\pi^2}{4l^2}\right),$$

expression dans laquelle il faut introduire la condition [2] relative au volume ; faisant donc $\mu=\frac{\beta^2}{4r}$, et négligeant le terme en β^4, il vient enfin, pour la valeur de la surface de notre couple,

$$4\pi rl + \pi\beta^2\left\{\frac{\pi^2 r}{l}-\frac{l}{r}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [3]$$

Or la surface de la portion de même longueur prise dans le cylindre est $4\pi rl$; la surface de notre couple sera donc plus grande ou plus petite que celle de la portion de cylindre, suivant qu'on aura

$$\frac{l}{r}<\frac{\pi^2 r}{l} \text{ ou } \frac{l}{r}>\frac{\pi^2 r}{l},$$

inégalités d'où l'on tire les suivantes :

$$2l<2\pi r \text{ ou } 2l>2\pi r.$$

Mais $2l$ est la longueur du couple, et $2\pi r$ la circonférence du cylindre ; si donc la longueur du couple excède la circonférence du cylindre, la surface de ce couple sera moindre que la portion de cylindre ayant même longueur; or la surface de notre couple étant égale à celle du couple primitivement considéré, et la figure déformée entière se composant de couples identiques à ce dernier, il s'ensuit que, dans la condition ci-dessus, la surface libre totale de la figure déformée sera moindre que la surface libre totale du cylindre.

§ 416. Ainsi, quand le cylindre est suffisamment long par rapport à son diamètre, sa surface est un maximum à l'égard de la petite altération qui partagerait la figure en portions alternativement renflées et étranglées, de forme et de longueur convenables; or nous savons que tel est, en effet, le mode de transformation spontanée d'un cylindre liquide instable; la théorie et l'expérience se vérifient donc encore mutuellement.

A la vérité, nous ne sommes pas certains qu'au commencement de la transformation d'un cylindre liquide dépassant sa limite de stabilité, la ligne méridienne de la figure soit rigoureusement une sinusoïde; mais cette condition n'est pas indispensable : quand la dernière inégalité du paragraphe précédent existe, la surface totale de la figure a diminué d'une quantité finie, bien que très-petite, et dès lors on peut évidemment, sans annuler tout à fait la différence ou la faire passer en sens contraire, modifier jusqu'à un certain point la ligne méridienne de façon qu'elle ne constitue plus une sinusoïde exacte.

En outre, on peut, sans que l'inégalité en question cesse d'avoir lieu, attribuer au couple toutes les longueurs supérieures à la circonférence du cylindre, pourvu qu'elles soient en même temps des parties aliquotes de la distance des deux bases; par conséquent, lorsque le cylindre dépasse suffisamment sa limite de stabilité, si, d'une part, il y a (§ 414) une infinité de petites déformations à l'égard desquelles sa surface est encore un minimum, il y a, d'autre part, plusieurs petites déformations à l'égard desquelles cette surface est un maximum.

§ 417. Supposons actuellement la longueur du cylindre assez peu considérable pour que la transformation spontanée ne donne lieu qu'à un seul couple, c'est-à-dire ne partage la figure entière qu'en une seule portion renflée et une seule portion étranglée. Dans ce cas, $2l$ représentera la longueur totale du cylindre; si donc cette longueur l'emporte sur la circonférence, la surface du cylindre sera un maximum à l'égard de la petite déformation, et cette déformation progressera. Si, au contraire, la longueur du cylindre est moindre que sa circonférence, la surface de ce cylindre sera un minimum à l'égard de la petite déformation, et celle-ci devra s'effacer d'elle-même. Enfin si le cylindre a une longueur égale à sa circonférence, la déformation, pourvu qu'on la suppose extrêmement peu, ou, avec plus d'exactitude, infiniment peu prononcée, n'altérera pas l'étendue de la surface, et conséquemment n'aura aucune tendance à progresser ou à s'effacer; or nous savons, en effet, qu'un cylindre liquide dont la longueur est égale à la circonférence est précisément à sa limite de stabilité, et de ce qu'en deçà de cette longueur il est stable, nous devons conclure qu'alors sa surface est un minimum à l'égard de toute espèce de déformation très-petite.

§ 418. La discussion contenue dans les paragraphes précédents établit donc, relativement au cylindre liquide, les principes suivants :

1° Quelque grand que soit l'intervalle des bases solides par rapport à leur diamètre, la surface du cylindre compris entre elles est toujours minimæ areæ à l'égard de certaines petites déformations.

2° Pour tout intervalle des bases excédant leur circonférence, la surface du cylindre, quoique minimæ areæ à l'égard des petites déformations ci-dessus, est, au contraire, maximæ areæ à l'égard de certaines autres petites déformations, parmi lesquelles est celle qui progresse d'après l'expérience.

3° Pour tout intervalle des bases moindre que leur circonférence, la surface du cylindre est minimæ areæ d'une manière complète, c'est-à-dire à l'égard de toute espèce de petite déformation.

L'analogie des phénomènes observés permet évidemment d'étendre ces principes aux autres figures d'équilibre, et nous en déduirons cette conclusion générale :

Lorsqu'une figure d'équilibre a une limite de stabilité, c'est seulement en deçà de cette limite que sa surface est minimæ areæ d'une manière complète, c'est-à-dire qu'elle est moindre que toutes les surfaces voisines comprenant le même volume et terminées au même système solide ; au delà de la limite dont il s'agit, la surface de la figure est encore minimæ areæ à l'égard de certaines déformations, mais elle est maximæ areæ par rapport à une autre au moins, que les forces moléculaires font progresser.

Il faut donc restreindre dans ce sens le principe admis par la généralité des géomètres relativement aux surfaces dont la courbure moyenne est constante : la plupart de ces surfaces ne sont complétement minimæ areæ qu'entre certaines limites, au delà desquelles elles sont minimæ areæ à l'égard de certaines variations, et maximæ areæ à l'égard d'autres variations.

Il est à peine nécessaire de faire remarquer que si, dans le calcul du § 415 et dans ce qui le suit, j'ai supposé la déformation finie quoique extrêmement peu prononcée, c'est que je raisonnais au point de vue physique, c'est-à-dire à celui des figures liquides réalisées ; mais il est clair qu'au point de vue purement mathématique, rien n'empêche de supposer la déformation infiniment petite, et qu'on arriverait encore aux mêmes conclusions ; seulement, dans le cas du cylindre, la ligne méridienne de la figure altérée devrait alors être une sinusoïde exacte, ce qui est indifférent pour la théorie, et le terme $\pi\beta^2 \left\{ \frac{\pi^2 r}{l} - \frac{l}{r} \right\}$ de l'expression [3] du paragraphe cité représenterait la variation seconde de la surface.

§ 419. Si donc on voulait traiter a priori, et uniquement par le calcul, la question des limites de stabilité des figures d'équilibre liquides, le problème consisterait à chercher, pour chacune des surfaces représentées par l'équation $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = C$, les limites entre lesquelles elle est minimæ areæ d'une manière complète, c'est-à-dire moindre que toute autre surface voisine comprenant le même volume et ayant les mêmes terminaisons ; ces terminaisons devraient d'ailleurs être caractérisées d'avance d'une manière suffisante. Si le calcul est praticable, on aura ainsi une méthode générale pour la détermination des limites de stabilité dont il s'agit.

Cette recherche ne me paraît pas dénuée d'intérêt, même au point de vue purement mathématique ; elle présenterait probablement des difficultés très-grandes, et je laisse aux géomètres le soin de l'essayer. On a vu, dans ce chapitre, qu'en s'aidant à la fois de l'expérience et de la théorie, la question se résout nettement et d'une manière simple dans plusieurs cas, au moyen de méthodes particulières.

Ajoutons qu'il est facile de se rendre raison maintenant de la stabilité de la sphère (§ 357) ; on sait, en effet, que la surface de ce corps est, d'une manière absolue, la plus petite surface possible qui puisse envelopper un volume donné. Quant au plan, sa stabilité est, ainsi que je l'ai montré (§ 358), une conséquence nécessaire de celle de la sphère.

§ 420. Un point reste à examiner. On a vu que la surface d'un cylindre liquide suffisamment long par rapport à son diamètre, est maximæ areæ à l'égard de plusieurs petites déformations, et l'analogie permet de penser que la même chose a lieu pour d'autres figures d'équilibre; en outre, nous savons qu'une figure d'équilibre quelconque excédant sa limite de stabilité éprouve toujours la même déformation spontanée dans les mêmes circonstances expérimentales; il faut donc reconnaître, tout au moins dans le cylindre, l'existence d'une condition théorique qui détermine le choix de la masse parmi toutes les déformations qui diminueraient sa surface.

On serait tenté de croire, au premier abord, que puisque la surface tend incessamment à décroître, les forces moléculaires choisissent la déformation qui rend ce décroissement le plus grand possible. Mais il n'en est pas ainsi; en effet, la déformation qui produirait le plus grand décroissement de la surface doit être unique pour une figure donnée; or, dans la transformation spontanée du cylindre, la longueur des couples varie, nous le savons, pour un même diamètre et une même distance des bases, avec les viscosités du liquide et les autres résistances. D'ailleurs l'expression [3] du § 415 montre qu'au commencement de la transformation, la plus grande diminution de la surface correspondrait au cas où la valeur de l serait la plus grande possible, et conséquemment à celui où, quel que fût l'écartement des bases relativement à leur diamètre, il ne se formerait entre elles qu'un seul renflement et un seul étranglement; et l'on ne peut objecter que cela tient à la nature de la courbe que j'ai prise pour ligne méridienne, et qui n'est peut-être pas la véritable; j'ai effectué un calcul analogue à celui du § 415 sur deux autres lignes, savoir, en premier lieu, sur une ligne brisée qui engendrerait une suite de cônes tronqués égaux réunis alternativement par leurs grandes et par leurs petites bases, et, en second lieu, sur une ligne composée d'arcs de cercle égaux alternativement convexes et concaves vers l'extérieur, c'est-à-dire sur la ligne méridienne supposée par M. Hagen (§ 394); or, dans les deux cas, j'ai trouvé encore que la plus grande diminution correspondait à la plus grande longueur de chaque portion renflée ou étranglée ; il est donc bien probable que ce résultat est général, et qu'ainsi il a lieu pour la véritable ligne méridienne.

§ 421. La condition qui fixe le choix entre toutes les petites déformations d'où résulterait une diminution de la surface, doit, par conséquent, être cherchée ailleurs, et l'on y arrive, je pense, par les considérations suivantes :

Lorsque, par une cause quelconque, une masse liquide soumise aux seules actions moléculaires ne constitue pas une figure d'équilibre, et qu'ainsi les pressions correspondantes aux différents points de sa surface sont inégales, elle tend nécessairement à égaliser ces pressions, et alors le liquide est chassé incessamment des points de plus forte pression vers ceux de moindre pression, jusqu'à ce que les inégalités aient complétement disparu. La figure se modifie donc de telle manière qu'à chaque instant les pressions soient aussi peu différentes que le permettent les conditions du phénomène; en d'autres termes, à chaque instant de celui-ci, la forme de la masse a toujours le plus d'analogie possible avec une forme d'équilibre.

Maintenant supposons une figure liquide dépassant sa limite de stabilité et réalisée entre des terminaisons solides. Elle aura nécessairement une foule de petites irrégularités imperceptibles à l'œil, et provenant à la fois du procédé même de sa formation, quel qu'il soit, des petits mouvements inséparables de ce procédé, etc., de sorte qu'elle ne constituera une figure d'équilibre qu'en apparence, et se trouvera, en réalité, dans le cas ci-dessus. Or, parmi ces irrégularités, les unes seront telles que, si elles existaient seules, elles augmenteraient la surface, et d'autres seront telles qu'elles la diminueraient; conséquemment les premières tendront à s'effacer, et les secondes, au contraire, tendront à progresser; mais, en vertu de ce qui précède, les forces moléculaires choisiront parmi ces dernières celles qui permettront à la masse modifiée de s'écarter le moins possible d'une autre figure d'équilibre, et les feront progresser en les régularisant.

On peut encore exprimer ce principe autrement: puisque les forces qui produisent la transformation sont les différences de pression, on peut dire que le phénomène se dispose de manière à s'accomplir avec la moindre dépense possible de force.

§ 422. Appliquons ces considérations au cylindre. Supposons un cylindre liquide d'une longueur considérable relativement au diamètre, réalisé par un moyen quelconque entre deux bases solides. Nous avons vu qu'une irrégularité consistant dans le partage de la figure en portions alternativement plus épaisses et plus minces, pouvait diminuer la surface; d'un autre côté, la figure d'équilibre la plus voisine du cylindre est l'onduloïde, qui se compose de portions alternativement renflées et étranglées; si donc notre principe est vrai, les forces moléculaires choisiront, parmi toutes les petites irrégularités du cylindre, les amincissements suffisamment espacés, elles les régulariseront, en les prononçant de plus en plus, et elles disposeront la figure de manière à l'approcher le plus possible d'un onduloïde. D'après cela, si le liquide était complétement exempt de viscosité, et qu'il y eût en même temps absence de résistances extérieures, de manière que la transformation pût s'effectuer avec une entière liberté, enfin si la distance des bases était un multiple exact de leur circonférence, le phénomène marcherait comme s'il avait pour origine un onduloïde infiniment peu différent du cylindre.

Or j'étais déjà arrivé (§ 405) à ce dernier résultat, en m'appuyant sur l'expérience et sur des raisonnements d'une autre nature; deux méthodes essentiellement différentes concourent donc à l'établir, et dès lors le principe exposé dans le paragraphe précédent, principe à peu près évident en lui-même et dont le résultat en question découle immédiatement, peut, je pense, être regardé comme suffisamment démontré.

§ 423. Si l'intervalle des bases solides n'est pas un multiple exact de leur circonférence, de sorte que les couples ne puissent prendre la longueur qui convient à l'onduloïde, c'est-à-dire leur longueur minima, ou bien s'il s'agit d'un liquide réel, auquel cas il y a des résistances, les couples seront plus allongés, nous le savons; mais, toujours en vertu de notre principe, la figure, à l'origine de la transformation, approchera autant que possible d'un onduloïde, et l'on peut admettre qu'elle sera ce que deviendrait un onduloïde si celui-ci était simplement étiré dans le sens de sa longueur. S'il en est effectivement ainsi, la ligne méridienne originaire sera encore une sinusoïde, comme nous l'avons supposé, et, par conséquent, la longueur des renflements sera encore rigoureusement égale à celle des étranglements.

Dans son second Mémoire, Beer énonce, au sujet des modifications par lesquelles passe progressivement un long cylindre, une idée analogue à celle que j'ai émise plus haut; il pense que, pendant toute la durée de la transformation, la masse, qui ne peut plus affecter une figure d'équilibre, se façonne de manière, non pas à s'éloigner toujours le moins possible d'une telle figure, mais à présenter constamment un ensemble de figures d'équilibre; en d'autres termes, selon lui, pendant l'accomplissement du phénomène, la figure se compose de portions renflées d'onduloïde alternant avec des portions cylindriques, ces dernières diminuant de plus en plus en diamètre tandis qu'elles augmentent en longueur, et les premières se renflant davantage en se raccourcissant, jusqu'à ce que, dans les portions cylindriques, il y ait égalité entre la longueur et la circonférence; ces mêmes portions constituant alors des cylindres instables, se transforment à leur tour; de là les sphères et les sphérules.

Cette idée, difficilement admissible a priori, est d'ailleurs en désaccord avec ce que montrent les expériences du § 400 : dans celles-ci, quand le rapport entre l'écartement et le diamètre des bases solides égale ou surpasse très-peu la limite de la stabilité, de manière que la transformation s'effectue avec assez de lenteur pour qu'on puisse bien observer les changements de la ligne méridienne, cette dernière forme toujours une courbe parfaitement continue, jusqu'à ce que le milieu de l'étranglement n'ait plus qu'une petite épaisseur; alors seulement on voit se développer avec rapidité le filet cylindrique. Aussi Beer, à qui j'avais fait part de mes remarques, a-t-il reconnu son erreur[1].

[1] *Ueber die Transformation des flüssigen Cylinders* (ANN. DE M. POGGENDORFF, vol. CII, p. 320).

§ 424. Les assemblages de lames liquides ont aussi leurs conditions de stabilité, et l'on a vu (§ 210) comment M. Lamarle a soumis ce sujet à une théorie précise. Je terminerai ce chapitre par le résumé d'un travail de M. Duprez[1] sur un phénomène dans lequel les pressions capillaires combinées avec l'action de la pesanteur produisent des effets curieux de stabilité et d'instabilité.

On savait qu'un vase plein de liquide et dont le goulot est suffisamment étroit, peut être renversé, l'orifice ouvert, sans que le liquide s'en échappe, et l'on attribuait simplement ce fait à la pression atmosphérique exercée de bas en haut à l'orifice; or M. Duprez a reconnu qu'avec des précautions convenables, on peut maintenir le liquide ainsi suspendu dans un vase dont l'orifice n'est nullement étroit : il est parvenu à soutenir l'eau à un orifice de $19^{mm},85$ de diamètre. Pour obtenir ce résultat, il faut que la surface du liquide à l'orifice soit plane et bien horizontale, condition que M. Duprez réalise au moyen d'un appareil ingénieux.

Il était difficile de comprendre comment les physiciens s'étaient arrêtés à l'idée de la pression atmosphérique comme cause unique des phénomènes de ce genre; en effet, si cette pression seule soutenait le liquide à un orifice étroit, elle devrait évidemment le soutenir à un orifice d'un diamètre quelconque; pourquoi donc y a-t-il une limite que l'on ne peut dépasser?

A l'époque où M. Duprez faisait ses observations, je m'occupais déjà des questions relatives à la stabilité des surfaces liquides; je ne tardai pas à trouver les principes qui servent de base à l'explication complète du phénomène dont il s'agit ici et à la détermination théorique

(1) *Sur un cas particulier de l'équilibre des liquides* (MÉM. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, t. XXVI, 1851, et t. XXVIII, 1854).

du diamètre limite, et je suggérai ces principes à M. Duprez, comme il se plaît à le reconnaître dans son Mémoire.

Supposons la surface du liquide à l'orifice mathématiquement plane et horizontale, et écartons toute cause accidentelle de trouble; il est clair que le liquide demeurera soutenu par la pression atmosphérique, quelque grand que soit le diamètre de l'orifice. Imaginons maintenant que la surface liquide éprouve une déformation excessivement petite qui la rende concave sur une moitié environ de son étendue, et, par suite, convexe sur l'autre moitié; dès lors l'équilibre ne pourra plus avoir lieu au point de vue de la pesanteur : à cause de la différence de niveau, le liquide de la portion convexe tendra à tomber et à laisser entrer l'air par la portion concave; mais, d'autre part, une surface plane est, nous le savons, stable au point de vue des forces moléculaires, quelle que soit sa grandeur, de sorte que, sous l'action de ces mêmes forces, la petite déformation tendra à s'effacer; en d'autres termes, les pressions capillaires correspondantes à la portion convexe l'emporteront sur celles qui appartiennent à la portion concave, et tendront conséquemment à rétablir la surface plane; il y aura donc lutte entre la pesanteur et les pressions capillaires.

Or, pour une même différence de niveau, les courbures des deux portions de la surface, et conséquemment les différences de pression capillaire, seront évidemment d'autant plus faibles que le diamètre de l'orifice sera plus grand; il y a donc nécessairement une limite de diamètre en deçà de laquelle les pressions capillaires prédominent, de façon que la surface liquide est stable, tandis qu'au delà c'est la pesanteur qui l'emporte et détermine ainsi l'écoulement du liquide.

D'après cela, pour arriver à une valeur théorique du diamètre limite, il suffirait de connaître, pour une petite différence de niveau, les rayons de courbure de deux sections normales rectangulaires aux sommets respectifs de la portion convexe et de la portion concave, en fonction du diamètre de l'orifice; avec ces éléments, on calculerait la différence des pressions capillaires correspondantes aux deux sommets en question, on l'égalerait au terme représentant l'action de la pesanteur, et l'on résoudrait l'équation par rapport au diamètre.

Mais comment se procurer ces données? Quand le diamètre de l'orifice est assez grand pour que le liquide refuse de se maintenir suspendu, l'échange entre ce liquide et l'air s'effectue d'une manière si rapide qu'il est impossible d'observer l'altération originaire de la surface. M. Duprez surmonte la difficulté en employant mon procédé de l'immersion de l'huile dans le liquide alcoolique : un vase cylindrique en verre de 8 centimètres de diamètre intérieur et de 7 de hauteur, est introduit, l'ouverture en bas, dans le liquide alcoolique, puis exactement rempli d'huile à l'aide de moyens que M. Duprez indique; ce vase est soutenu à une certaine hauteur dans le liquide ambiant, de façon que la surface de l'huile à l'orifice soit libre, et la quantité d'huile est telle que cette surface est plane. Si les densités des deux liquides sont égales, la surface de l'huile conserve, on le comprend, sa forme plane; mais si l'on ajoute au liquide ambiant un excès croissant d'alcool, on atteint un point où la pesanteur reprend ses droits sur l'huile, et où la stabilité n'est plus possible; or il est aisé de rendre l'excès d'alcool assez petit pour que la déformation s'effectue avec une excessive lenteur, et qu'ainsi on puisse l'examiner parfaitement.

En opérant de cette manière, M. Duprez a constaté que la déformation consiste effectivement dans le partage de la surface en une seule portion convexe et une seule portion concave, et il a pu, à l'aide de moyens convenables, déterminer avec une approximation suffisante les éléments indiqués plus haut, ce qui le conduit à la formule

$$D = 5{,}485\sqrt{h},$$

dans laquelle D est le diamètre limite, et h la hauteur à laquelle le liquide s'élèverait dans un tube capillaire d'un millimètre de rayon.

M. Duprez en déduit, pour l'eau distillée à la température ordinaire, $D = 21^{mm},13$. Or, avant de recourir à la méthode ci-dessus, il était arrivé à la valeur approchée du diamètre limite relatif au même liquide, par une voie essentiellement différente : avec un diamètre inférieur au diamètre limite, le liquide peut demeurer suspendu en présentant, à l'orifice, une surface convexe ou une surface concave ; mais si, par un moyen approprié, on augmente jusqu'à un certain point cette convexité ou cette concavité, le liquide s'écoule. M. Duprez a mesuré, pour un nombre suffisant de diamètres, les flèches respectives des surfaces convexes et concaves à l'instant de la rupture de l'équilibre, et il les nomme *flèches de rupture*. Avec ces données, il lie d'une manière générale la flèche de rupture au diamètre correspondant par une équation empirique, et égalant, dans celle-ci, la flèche à zéro, il obtient le diamètre limite pour le cas d'une surface plane. Il trouve ainsi, à l'égard de l'eau distillée, la valeur $21^{mm},44$, valeur bien peu différente de celle qui résulte de la méthode théorique.

L'accord si satisfaisant de ces deux valeurs, obtenues par des méthodes qui n'ont absolument rien de commun, ne peut laisser aucun doute sur la légitimité de la formule mentionnée plus haut, formule d'après laquelle le diamètre limite est proportionnel à la racine carrée de la hauteur capillaire du liquide.

Ces mêmes valeurs surpassent un peu le diamètre $19^{mm},85$ trouvé par l'expérience directe ; mais cela doit être, car, dans cette expérience, il est impossible d'éviter de petites causes de trouble qui, lorsqu'on approche de la limite, suffisent pour amener la destruction de l'équilibre.

M. Duprez soumet la formule à de nouvelles vérifications, en l'appliquant à trois autres liquides, l'alcool, l'huile d'amande douce et l'éther sulfurique : il cherche également, pour chacun de ceux-ci, le diamètre limite par la méthode des flèches de rupture et par la formule, et il arrive encore à des résultats concordants. Voici, en effet, ces résultats :

Alcool	par les flèches, $13^{mm},14$, par la formule, $13^{mm},48$.
Huile d'amande	par les flèches, $15^{mm},00$, par la formule, $15^{mm},03$.
Éther	par les flèches, $12^{mm},02$, par la formule, $12^{mm},48$.

L'accord est moins satisfaisant pour l'éther, mais, à l'égard de ce liquide, M. Duprez n'a mesuré les flèches de rupture que dans un seul tube.

Enfin M. Duprez étend les mêmes principes à l'explication du fait bien connu, qu'il est impossible de verser un liquide dans un vase à goulot étroit : le liquide prend, dans l'orifice, une surface assez stable pour que l'échange avec l'air intérieur au vase ne puisse s'opérer.

CHAPITRE XI.

Applications des propriétés des cylindres liquides instables, ou, plus généralement, des figures liquides dont une dimension est considérable relativement aux deux autres : théorie de la formation des gouttes au bord de certaines lames; théorie de l'explosion des bulles; théorie de la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires.

§ 425. J'ai averti (§ 153) que je donnerais l'explication de la génération des gouttes au bord des disques liquides de Savart. Disons auparavant que Magnus, dans le passage de ses *Recherches hydrauliques* relatif aux disques dont il s'agit (§ 333), a essayé de résoudre la question : il regarde, ainsi qu'on l'a vu, la lame comme allant toujours en diminuant d'épaisseur de la partie centrale jusqu'au bord; il suppose qu'à ce bord la lame devenue très-mince éprouve des déchirures, et que les portions ainsi séparées se contractent, par l'attraction de leurs molécules, en autant de petites masses, lesquelles constitueraient les gouttes.

Ces idées ne s'accordent pas avec les résultats de M. Hagen (§ 153), si fortement appuyés, comme on a pu s'en convaincre, et suivant lesquels le minimum d'épaisseur ne serait pas au contour du disque; d'ailleurs elles ne rendent raison ni de la présence du bourrelet observé par Savart à ce contour, ni de la vitesse plus grande des gouttes lancées par les bords de l'échancrure que produit dans la lame l'introduction d'un obstacle solide, ni des directions tangentielles de ces dernières gouttes.

§ 426. Abordons actuellement l'explication annoncée.

Considérons ce qui se passe immédiatement après l'ouverture des deux orifices d'où s'échappent les veines opposées (§ 232), pendant que le disque liquide croît en diamètre. Ce disque constitue une figure de révolution, dont la section méridienne présente évidemment une courbure très-forte à son équateur, c'est-à-dire au bord même de la nappe; or cette forte courbure détermine nécessairement une pression capillaire énergique dirigée suivant le rayon du disque et en sens contraire du mouvement; au bord du disque, le liquide se trouve donc sollicité par deux forces opposées, dont l'une tend à l'éloigner du centre et l'autre à l'en rapprocher; et de là doit résulter un effet analogue à celui qui a lieu à la rencontre des deux veines, où deux forces opposées sont également en présence, c'est-à-dire que le liquide doit éprouver un déplacement latéral; en d'autres termes, pendant que le disque se développe, le liquide refoulé doit former un bourrelet tout le long de son contour. Cela posé, pendant que le disque va en augmentant, ce bourrelet tend, d'une part, à grossir par les causes mêmes qui lui donnent naissance, et, d'autre part, à s'amincir par suite de son extension suivant la circonférence croissante du disque, et l'on peut admettre que ces deux effets se neutralisent plus ou moins, de façon que le bourrelet varie peu en grosseur jusqu'à ce que le disque ait atteint son plus grand diamètre. Or ce même bourrelet ayant la forme d'une sorte de cylindre qu'on aurait courbé en anneau, constitue une figure liquide instable, et doit de toute nécessité se résoudre, pendant son développement, en masses isolées, comme l'anneau d'huile du § 368. A la vérité, il tient, par son bord intérieur, à la lame liquide; mais de là naît simplement une légère résistance, qui, d'après ce qu'on a vu à l'égard des cylindres, doit se borner à rendre les divisions un peu plus longues, sans empêcher la transformation.

Maintenant le bourrelet, en vertu de l'inertie de sa masse totale, ne peut perdre complétement sa vitesse en même temps que la portion de la lame à laquelle il adhère immédiatement; les petites masses dans lesquelles il s'est converti se sépareront donc du contour de la lame, et seront lancées avec leur petit excès de vitesse acquise. En ce moment, la pression capillaire doit reformer rapidement un nouveau bourrelet, qui se résout bientôt, comme le premier, en masses isolées, et ainsi de suite. Telle est, j'en suis convaincu, la véritable théorie de la génération et de la projection des gouttes, et elle s'applique également aux gouttes lancées par le bord des lames ouvertes et sans auréole du premier Mémoire de Savart (§ 230).

Voyons si cette théorie, qui rend ainsi raison des phénomènes généraux, satisfait de même à tous les détails observés par Savart, par M. Hagen et par Magnus.

Dès que les petites masses dans lesquelles se résout l'un des bourrelets successifs se séparent les unes des autres, chacune des portions du bord comprises entre elles n'ayant plus que la petite épaisseur de la lame elle-même, se trouve aussitôt soumise, par suite de sa forte courbure transversale, à une pression capillaire très-énergique ; cette pression agissant sur des points où le liquide n'a plus qu'une faible vitesse de translation, doit déterminer un retrait vers le centre du disque, et un commencement de bourrelet; mais comme les petites masses sont encore adhérentes au disque par leurs bases et continuent, en vertu de leur inertie, leur mouvement de translation, les portions intermédiaires du bord doivent paraître creusées, et chaque petite masse doit se montrer au sommet d'un angle saillant. Or c'est précisément l'aspect que décrit Savart dans son premier Mémoire, à l'égard des lames ouvertes et sans auréole, « ...... dont le contour libre, *légèrement dentelé,* lance un grand nombre de gouttelettes, *qui partent des angles saillants des dentelures.* »

Savart ne fait pas la même description du contour des lames de son second Mémoire; il dit seulement (§ 232) que « les nappes sont constamment entourées d'un petit bourrelet arrondi d'où s'échappent une multitude de gouttelettes »; mais M. Hagen avance que les gouttes *étirent fortement la lame*; or c'est là précisément l'apparence qui doit résulter de l'ensemble de leur petit mouvement en avant et du petit retrait des portions intermédiaires.

A l'instant où une série de gouttes quitte complétement le disque, les angles saillants dont je viens de parler doivent s'effacer brusquement et se convertir en des portions de bourrelet; celles-ci constituent alors, avec les portions précédemment formées, un bourrelet continu, qui poursuit son mouvement de retrait jusqu'à ce que, grossissant toujours et diminuant ainsi de courbure méridienne, sa pression capillaire cesse de l'emporter sur le reste de force qui pousse en avant la portion de la lame à laquelle il adhère; alors il recommence à marcher lui-même en avant pendant qu'il effectue sa transformation en masses isolées; puis les phénomènes précédents se reproduisent, et ainsi de suite; le diamètre du disque doit donc manifester une succession rapide d'accroissements et de diminutions, comme l'a observé M. Hagen. Ajoutons que tous ces phénomènes ne peuvent s'accomplir avec une parfaite uniformité tout le long du contour : le bourrelet, on le comprend, n'a pas, en général, la même épaisseur dans toute son étendue, de sorte que sa transformation ne s'effectue pas en même temps partout; de là les irrégularités signalées par M. Hagen.

Quand, au moyen d'un fil transversal, on détermine une échancrure dans le disque liquide, la pression capillaire doit également refouler les deux bords de celle-ci en y formant des bourrelets, bien que la présence de ces derniers ne soit point signalée par M. Hagen et par Magnus. Chacun de ces bourrelets constitue aussi une figure allongée qui doit, pendant le trajet du liquide dont elle est formée, se résoudre en petites masses, et ces masses, dès qu'elles sont libres, doivent s'échapper dans les directions mêmes de leurs mouvements de translation; de là les gouttes lancées par les bords de l'échancrure, et leurs directions tangentielles. En outre, dans ces mêmes bourrelets, il n'y a point d'extension du liquide, et conséquemment la tension ne peut amoindrir la vitesse; celle-ci, on le comprend, n'est que faiblement altérée par l'adhérence latérale des bourrelets avec la lame, et les gouttes qui prennent leur origine dans ces bourrelets doivent ainsi être projetées beaucoup plus loin que les autres, comme l'a observé Magnus.

Enfin on peut montrer aux yeux un bourrelet se formant au bord libre d'une lame, son retrait rapide et sa conversion subséquente en masses isolées; il suffit, pour cela, de s'arranger, dans l'expérience du § 368, de manière que l'une au moins des deux lames planes d'huile ait une assez grande épaisseur; alors son retrait, quand on l'a crevée, s'effectue avec assez peu de rapidité pour qu'on distingue parfaitement un bourrelet tout le long du bord de l'ouverture, bourrelet qui, parvenu à l'anneau métallique, y constitue l'anneau liquide régulier que nous connaissons, et qui ne tarde pas à se résoudre en petites masses.

Dans cette expérience, il est vrai, la lame est formée d'un liquide en repos et le bourrelet marche du centre à la circonférence, tandis que, dans les expériences de Savart, le liquide de la lame est en mouvement, et le retrait s'effectue de la circonférence vers le centre; mais ces différences n'ont évidemment aucune portée théorique dans la question.

§ 427. Il est clair que, toutes les fois qu'une lame présentera un bord libre, la forte pression capillaire à ce bord y déterminera, comme dans les cas ci-dessus, la formation d'un bourrelet, et que celui-ci se résoudra de même en masses isolées : c'est ce qui arrive, par exemple, ainsi que je l'ai dit (§ 235), à l'égard des lames qu'on développe en lançant le liquide obliquement en l'air. Dans certaines circonstances, le liquide qui constitue le bourrelet est animé d'un mouvement de translation dans le sens de la longueur de ce bourrelet, comme aux deux bords de l'échancrure produite dans un disque liquide de Savart, aux bords des lames résultant de la rencontre de deux veines qui forment un angle entre elles (§ 234), etc.

§ 428. Les mêmes principes vont nous servir à rendre raison d'un fait mystérieux décrit d'abord par Hooke (§ 318), puis par Leidenfrost (§ 321), et que Fusinieri a cherché à expliquer (§ 324) en partant de sa théorie ; je veux parler de l'explosion des bulles. Il résulte des observations, que le phénomène est le plus prononcé quand la lame est arrivée à une très-grande minceur : alors, comme on l'a vu, elle fait entendre en éclatant un bruit perceptible, et se convertit en une sorte de poussière liquide qui est emportée à plus d'un mètre de distance.

On ne peut admettre qu'à l'instant même où la lame se perce en un point, tout le reste de cette lame se change simultanément en minimes gouttelettes : une semblable transformation échapperait à tout principe théorique ; d'ailleurs il suit du résultat du § 121 que la pression exercée sur l'air intérieur par une bulle de savon de 5 centimètres de diamètre, comme celles de Leidenfrost, équivaut à la pression d'une colonne d'eau n'ayant qu'environ $0^{mm},4$ de hauteur (1); or cette addition si faible à la pression atmosphérique extérieure ne peut déterminer qu'une diminution insensible du volume de l'air contenu dans la bulle, et conséquemment, si la lame se transformait en globules sur toute son étendue à la fois, l'air intérieur, si peu comprimé, et trouvant, en outre, une infinité d'issues en même temps, ne pourrait prendre, en se détendant, qu'un mouvement presque nul ; dès lors pas d'explosion et pas de transport notable des globules.

Il faut donc, de toute nécessité, que la conversion en globules s'effectue successivement, à partir d'un premier point, où la rupture s'est faite. D'après cela, voyons comment les choses doivent se passer. Dès qu'une petite ouverture s'est formée, elle s'accroît rapidement par le retrait de la lame ; mais, en même temps, un autre effet se produit, savoir la génération d'un bourrelet tout le long du bord de l'ouverture, ainsi que nous l'avons vu dans la lame d'huile du § 426 ; et comme, à cause de la grande minceur de la lame d'eau de savon, les dimensions transversales de ce bourrelet sont excessivement

(1) Dans le § 121, il s'agit du liquide glycérique, et non de l'eau de savon ; mais les tensions de ces deux liquides ne différant pas sensiblement (§ 299), il en est de même, à égalité de diamètre, des pressions exercées par leurs bulles respectives.

minimes, il doit se transformer en globules avec une extrême vitesse. Si, dans l'expérience de la lame d'huile, on ne voit pas le bourrelet se transformer avant qu'il ait atteint l'anneau métallique, c'est que le phénomène est considérablement ralenti (§ 379) par la viscosité de l'huile et surtout par la présence du liquide alcoolique ambiant.

Maintenant, dans notre bulle, les deux effets ci-dessus sont accompagnés d'un troisième : aussitôt qu'une ouverture existe, la bulle, nous le savons, commence à diminuer de diamètre, en chassant au dehors l'air qu'elle contenait ; et, bien que la force qui agit ainsi soit faible, elle expulse l'air avec rapidité, parce qu'elle est continue et croissante, et que, d'autre part, l'ouverture va en grandissant : on a la preuve de cette rapidité dans une expérience de M. Henry (§ 151) ; or l'air ainsi vivement expulsé emporte au loin les globules ci-dessus. Mais dès que cette première série de globules est enlevée, un nouveau bourrelet se reforme au bord de l'ouverture agrandie, puis se résout également en globules qui sont emportés comme les précédents, et ainsi de suite. En conséquence de la ténuité de la lame, toutes ces générations de séries de globules, bien que successives, s'accomplissent en un clin d'œil, de sorte que l'observateur ne peut constater que le résultat final, savoir la présence et le mouvement de la poussière liquide dans l'air environnant.

On le voit, cette explication, qui repose sur des principes et des faits bien établis, rend compte de toutes les particularités du phénomène.

§ 429. Du reste, pour la mettre hors de doute, je l'ai soumise à une épreuve expérimentale : je me suis dit que si, dans une bulle qui éclate, la production des globules s'effectue en réalité par séries successives, il devait en être de même à l'égard d'une lame plane; or, dans ce dernier cas, la chose pouvait se vérifier, car il suffisait que la lame, lors de sa rupture, fût très-voisine d'une surface plane, sur laquelle les globules ou gouttelettes iraient marquer leurs traces.

D'après cela, on a opéré ainsi qu'il suit : on plaçait, sur une tablette plane et horizontale, une feuille d'un papier légèrement absorbant et coloré en brun pâle (papier de paille); ensuite on développait une lame de liquide glycérique dans le grand anneau en fil de fer qui avait servi aux expériences des §§ 186bis et 392, cet anneau avec sa lame était maintenu alors pendant quelques moments dans une position verticale, afin que l'excès de liquide vînt s'accumuler en gouttes au point le plus bas; ces gouttes enlevées, on posait doucement l'anneau, les pieds en l'air, sur le papier. Le fil de fer qui constitue cet anneau ayant 3^{mm} d'épaisseur, la lame se trouvait à $1^{mm},5$ du papier. Les choses étant ainsi préparées, on crevait la lame, et, afin que le retrait de celle-ci eût à parcourir un plus grand espace, la rupture était produite généralement en un point très-rapproché du contour intérieur de l'anneau. Pour cette dernière opération, on n'a pas employé, comme dans les autres expériences où il fallait briser des lames, une pointe de papier à filtre, parce que celle-ci aurait pu déprimer la lame et l'amener en contact avec le papier; on a fait usage d'une aiguille à coudre rougie à la lampe: la lame éclate dès que la pointe de cette aiguille la touche.

Aussitôt la lame brisée, on enlevait l'anneau pour mieux observer les traces des gouttelettes; or, à travers les irrégularités qu'elles présentaient, on a nettement reconnu leur disposition en plusieurs séries distinctes, placées les unes derrière les autres par rapport au point de rupture. L'expérience a été répétée quinze fois, et presque toujours avec des résultats du même ordre, plus ou moins bien accusés ; c'est à peine si deux d'entre eux ont dû être écartés.

On a procédé de différentes manières : d'abord, après avoir formé la lame, on la tenait verticalement jusqu'à ce qu'il s'y montrât des zones horizontales rouges et vertes bien caractérisées, et, quand l'anneau était posé sur le papier, on crevait la lame au point où ces zones indiquaient la plus grande épaisseur. En second lieu, on ne laissait la lame verticale que pendant un temps beaucoup moindre, puis on inclinait successivement l'anneau dans différents sens pour faire disparaître les zones naissantes. Lorsque l'anneau est posé, la lame est légèrement bombée ; c'est que, pendant qu'on descend l'anneau vers le papier, la résistance de l'air fait rester le milieu de la lame un peu en arrière, et que le contact de l'anneau mouillé avec le papier est assez intime pour que l'excès d'air emprisonné ne puisse s'échapper ; on lui donnait issue en soulevant un peu l'anneau d'un côté ; dès que celui-ci était replacé, la lame se montrait plane. En troisième lieu, on laissait subsister la convexité, et l'on attendait une minute ; on voyait alors se développer des anneaux concentriques de diverses couleurs ; enfin on crevait la lame soit en son milieu, soit près de son bord.

Je reproduis ici (*fig.* 104 et 105), au quart de leur grandeur, les deux meilleurs résultats ; celui de la *fig.* 104 a été obtenu par le second procédé, et celui de la *fig.* 105, par le troisième ; le point de rupture est en *a*.

Chaque série de gouttelettes se formant pendant le retrait rapide de la lame, participe de la vitesse de ce mouvement; les gouttelettes vont donc rencontrer le papier sous une très-grande obliquité, de sorte que leurs

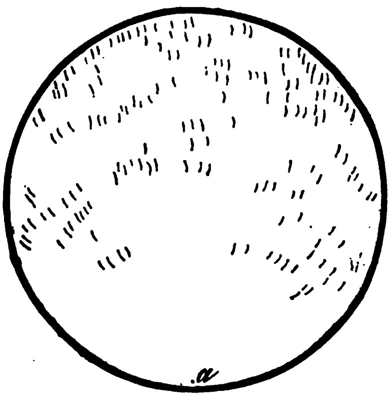

Fig. 104.

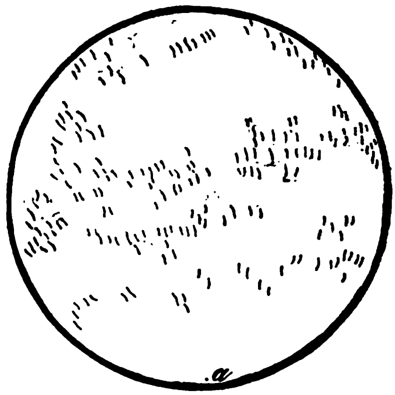

Fig. 105.

traces ne sont pas rondes, mais allongées dans le sens du retrait; de plus, quand on les observe immédiatement après leur production, on reconnaît que la plupart présentent une suite de renflements et d'étranglements; c'est qu'en vertu de leur forme allongée, elles ont commencé à éprouver la transformation spontanée de sembables figures, et que cette transformation a été arrêtée par l'adhérence croissante avec le papier qu'elles imbibent. Quant aux irrégularités et aux interruptions de ces ensembles de traces, elles proviennent évidemment de ce que la lame n'a pas une épaisseur égale partout (1).

(1) Depuis que mon ouvrage est à l'impression, MM. Marangoni et Stefanelli ont fait paraître le Mémoire que j'ai inscrit au § 503 sous le n° 38. Ils ont étudié aussi, mais par un procédé tout différent du mien, et très-ingénieux, ce qui se passe lors de la rupture des bulles. Ce procédé consiste essentiellement à rendre le liquide fluorescent par l'addition d'une substance convenable, telle que de l'esculine, et à provoquer la rup-

§ 430. Dans le Mémoire résumé au § 167, M. Van der Mensbrugghe tire de notre principe de la transformation spontanée des figures liquides allongées, l'explication d'un fait qui se montre dans certains cas d'étalement d'un liquide sur un autre : par exemple, comme l'a

ture de la bulle pendant que celle-ci est exposée à l'éclairement intermittent des étincelles d'un appareil de Ruhmkorff. Lorsque plusieurs bulles sont successivement soumises à l'expérience, il arrive, on le comprend, que, pour l'une ou l'autre d'entre elles, une étincelle jaillit pendant la courte durée de la destruction de la lame; la persistance, bien que très-minime, de l'impression sur la rétine permet donc d'observer la bulle dans une phase du phénomène de sa rupture.

Les auteurs ont constaté ainsi, en premier lieu, que lorsqu'une bulle éclate en un point, il s'y forme simplement une ouverture, qui grandit rapidement jusqu'à s'étendre à toute la lame; en second lieu, que le bord de cette ouverture est garni d'un bourrelet dentelé, analogue à celui des lames de Savart, et que l'angle saillant de chaque dentelure se prolonge en un filet incurvé vers l'extérieur.

Jusqu'ici tout est parfaitement d'accord avec ma théorie et avec mon expérience : les sphérules dans lesquelles se convertit le bourrelet, sphérules chassées à l'extérieur par le mouvement de l'air, étirent le bourrelet, et y produisent les angles saillants, dont elles se détachent avec des effilements. Mais les auteurs ajoutent que les filets sont terminés par des ramifications, lesquelles se résolvent en gouttelettes extrêmement minimes.

Si ces ramifications étaient réelles, si les auteurs n'ont pas été trompés par quelque illusion due à l'instantanéité de l'observation, le fait s'expliquerait bien difficilement; en effet, le bourrelet ne peut, semble-t-il, présenter ainsi, en différents points de sa longueur, des angles saillants se prolongeant en filets, que s'il est étiré par de petites masses, ou sphérules, projetées à l'extérieur; et il n'est guère admissible que ce soit chacune de ces sphérules qui se subdivise ainsi pour donner lieu aux ramifications dont il s'agit. Je suis porté à croire qu'au moment de l'observation, les sphérules étaient déjà détachées et éloignées de la bulle, et que les auteurs portant surtout leur attention sur les dentelures et les filets, n'ont pas remarqué les sphérules disséminées dans l'air. Comme, après la projection des sphérules, les filets qu'elles laissent derrière elles doivent se convertir eux-mêmes en sphérules excessivement petites, c'est peut-être ce dernier phénomène que les auteurs ont pris pour des ramifications qui se transforment.

Je dois dire, cependant, que les auteurs ont répété un grand nombre de fois l'expérience, et qu'ils ne mentionnent d'autre variation dans l'aspect du phénomène, que celle de l'étendue de la portion de lame qui subsiste encore à l'instant de l'observation.

observé M. Tomlinson(1), une gouttelette d'huile de lavande déposée sur l'eau distillée s'étale d'abord en une lame vivement colorée, puis, après quelques secondes, cette lame se subdivise en un grand nombre de filaments déliés, qui dessinent de petits polygones curvilignes dont l'ensemble rappelle l'aspect d'une fine dentelle; or ces filaments ne tardent pas à se résoudre en séries de petites lentilles.

§ 431. Nos principes expliquent de même complétement un autre phénomène, savoir la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires, constitution que Savart a si admirablement étudiée au point de vue expérimental. Nous allons exposer notre théorie avec détail, en la mettant constamment en parallèle avec les observations de l'illustre physicien.

Considérons une veine liquide s'écoulant librement sous l'action de la pesanteur par un orifice circulaire percé en mince paroi dans le fond horizontal d'un vase. Les molécules du liquide intérieur au vase, qui affluent de tous les côtés vers l'orifice, conservent encore, comme on sait, immédiatement après leur sortie, des directions obliques au plan de cet orifice, d'où résulte un rétrécissement rapide de la veine à partir de l'orifice jusqu'à une section horizontale que l'on désigne improprement sous le nom de section contractée. Arrivées à cette section, qui est peu éloignée de l'orifice, les molécules tendent à prendre toutes une direction verticale commune, avec la vitesse correspondante à la hauteur du liquide dans le vase, et elles sont, en outre, sollicitées dans cette même direction verticale par leur pesanteur individuelle. Il résulte de là que, l'orifice étant supposé

(1) *On the cohesion-figures of liquids* (PHILOS. MAGAZ. 4me Série, 1861, t. XXII, p. 249).

circulaire, la veine tend à constituer, à partir de la section contractée, un cylindre sensiblement parfait et d'une longueur quelconque ; mais cette forme est modifiée, comme on le sait encore, par l'accélération que la pesanteur imprime à la vitesse du liquide, et le diamètre de la veine, au lieu d'être partout le même, va en décroissant plus ou moins à mesure qu'on s'éloigne de la section contractée.

Si les causes que nous venons de rappeler agissaient seules, la veine se montrerait donc simplement de plus en plus effilée à mesure qu'on la considérerait plus loin de la section contractée, sans perdre ni sa limpidité ni sa continuité. Mais il résulte de nos expériences et de nos principes, qu'une semblable figure liquide, dont la forme approche de celle d'un cylindre très-allongé, doit se transformer en une série de sphères isolées ayant leurs centres rangés sur l'axe de la figure. A la vérité, il s'agit ici d'un liquide soumis à l'action de la pesanteur ; mais il est évident que, pendant la chute libre d'un liquide, la pesanteur ne met plus aucun obstacle au jeu des attractions moléculaires, et que celles-ci doivent alors exercer sur la masse les mêmes actions figuratrices que si cette masse était sans pesanteur et à l'état de repos; c'est ainsi, par exemple, que les gouttes de pluie prennent, dans leur chute, la forme sphérique. Seulement, pour que la conclusion précédente fût tout à fait rigoureuse, il faudrait que toutes les parties de la masse fussent animées de la même vitesse, ce qui n'a pas lieu pour la veine; mais on comprend que, si cette différence peut apporter quelques modifications au phénomène, elle ne saurait empêcher la production de celui-ci.

Le liquide de la veine devra donc nécessairement arriver par degrés, pendant son mouvement, à constituer une série de sphères isolées.

Mais ce liquide se renouvelant continuellement, le phénomène de la transformation doit aller aussi en se renouvelant toujours. En second lieu, chaque portion du liquide commençant à être soumise aux forces figuratrices dès qu'elle fait partie du cylindre imparfait que tend à constituer la veine, c'est-à-dire dès l'instant où elle franchit la section contractée, et demeurant ensuite, pendant son trajet, sous l'action continue de ces forces, on voit que chacune des *divisions* de la veine doit commencer à se dessiner à partir de la section contractée, et descendre, emportée par le mouvement de translation du liquide, en se modifiant par degrés pour arriver à l'état de sphère isolée. Or il suit de là qu'à un instant donné, les divisions de la veine doivent se trouver dans une phase d'autant plus avancée de la transformation qu'on les considère à une distance plus grande de la section contractée, du moins jusqu'à celle où la transformation en sphères est complétement effectuée. De l'orifice à la distance où a lieu la séparation des masses, la veine doit évidemment être continue; mais à une distance plus grande, les portions de liquide qui passent, doivent être isolées les unes des autres.

Si donc les mouvements du liquide, tant celui de translation que celui de transformation, étaient assez lents pour qu'on pût les suivre des yeux, on verrait la veine formée de deux parties distinctes, l'une supérieure continue, l'autre inférieure discontinue. La surface de la première présenterait une suite de renflements et d'étranglements qui descendraient avec le liquide, en se renouvelant continuellement, et qui, imperceptibles à leur origine et jusqu'à une certaine distance de la section contractée, se prononceraient de plus en plus pendant leur mouvement de translation, les renflements devenant plus saillants et les étranglements plus profonds; enfin, ces divisions de la veine arrivant l'une après l'autre, dans leur plus grand développement, à l'extrémité inférieure de la partie continue, on les verrait s'en détacher, et tendre ensuite vers la forme sphérique. Or on sait, depuis les belles observations de Savart[1], que telle est, en effet, la constitution réelle de la veine.

Ajoutons que, dans la même hypothèse du ralentissement des mouvements, on verrait la séparation de chacune des masses précédée de la formation d'un filet qui se résoudrait en masses plus petites. Si les choses se passaient exactement comme dans les cylindres, ces petites masses seraient des sphérules inégales, de sorte que chaque sphère isolée serait suivie de semblables sphérules; la partie discontinue de la veine se montrerait donc composée de sphères isolées de même volume et de sphérules inégales rangées dans les intervalles des premières, les unes et les autres étant emportées par le mouvement de translation, et se renouvelant sans cesse à l'extrémité de la partie continue. Mais l'accélération de la descente allonge les divisions et, par suite, les étranglements, pendant leur trajet; dès lors, en vertu de ce qui a été exposé au § 383, les filets doivent, en général, être assez épais, et les plus grosses des masses dans lesquelles ils se résolvent peuvent ne pas être très-inférieures en diamètre aux masses principales, auquel cas la dénomination de sphérules ne leur est pas appli-

(1) *Mémoire sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi* (ANN. DE CHIM. ET DE PHYS. DE PARIS, 1833, tome LIII, page 337).

cable. C'est effectivement, ainsi qu'on le verra (§ 478), ce que l'expérience a constaté.

§ 432. Maintenant, le mouvement de translation étant trop rapide pour que les phénomènes qui se produisent dans la veine soient saisissables par l'observation directe, il doit résulter de là certaines apparences particulières. Rappelons ici que lorsqu'un cylindre liquide se résout en sphères, la vitesse avec laquelle la transformation s'effectue est accélérée, et commence par être extrêmement petite. A cause donc de cette petitesse originaire, et de la rapidité du mouvement de translation dans la veine, les effets de la transformation graduelle ne pourront devenir perceptibles qu'à une distance plus ou moins grande de la section contractée. Jusqu'à cette distance, le passage rapide des renflements et des étranglements devant l'œil ne pourra donner lieu à aucun effet sensible ; de sorte que cette portion de la veine se montrera sous la forme qu'elle affecterait si elle n'avait aucune tendance à se diviser. A partir de cette même distance, les renflements commençant à prendre un développement notable, la veine paraîtra aller en s'élargissant, jusqu'à une autre distance au delà de laquelle le diamètre se montrera à peu près constant.

Telle est, en effet, comme l'ont encore montré les observations de Savart, la forme que présente à l'observation directe une veine soustraite à toute influence étrangère.

Enfin on sait qu'à partir de l'orifice jusqu'au point où elle commence à paraître s'élargir, la veine se montre limpide, tandis qu'au delà elle paraît plus ou moins trouble; et Savart a parfaitement expliqué ces deux aspects différents, ainsi que d'autres apparences curieuses que présente la partie trouble quand on n'a pas écarté les influences étrangères : la limpidité de la portion supérieure est due au peu de développement des renflements et des étranglements qui s'y propagent, et le trouble ainsi que les autres apparences du reste de la veine, résultent du passage rapide devant l'œil, d'abord des renflements et des étranglements devenus plus prononcés, puis, plus bas, des sphères isolées et des masses plus petites interposées.

§ 433. Mais nous pouvons aller plus loin. Deux conséquences découlent immédiatement de notre explication de la constitution de la veine. En premier lieu, les divisions se transformant pendant leur descente, il est clair que l'espace parcouru par une division pendant le temps qu'elle met à effectuer une partie donnée de sa transformation, sera d'autant plus grand qu'elle descendra plus vite, ou, en d'autres termes, que la charge, c'est-à-dire la hauteur du liquide dans le vase, sera plus considérable; d'où il suit évidemment que, pour un même orifice, la longueur de la partie continue de la veine doit croître avec la charge. Or c'est ce que confirment les observations de Savart.

En second lieu, puisque la transformation d'un cylindre est d'autant plus lente que le cylindre a un plus grand diamètre, le temps qu'emploiera une division de la veine pour effectuer une même partie de sa transformation, sera d'autant plus long que la veine aura plus d'épaisseur; d'où il suit que, si la vitesse d'écoulement ne change pas, l'espace que parcourra la division pendant ce temps, sera d'autant plus considérable que le diamètre de l'orifice sera plus grand; par conséquent, pour une même charge, la longueur de la partie continue doit croître avec le diamètre de l'orifice, et c'est encore ce que vérifient les observations rapportées dans le Mémoire cité.

Quant aux lois qui régissent ces variations de la longueur de la partie continue, Savart déduit de ses observations, qui ont été faites en employant des veines d'eau, que, pour un même orifice, cette longueur est à peu près proportionnelle à la racine carrée de la charge, et que, pour une même charge, elle est à peu près proportionnelle au diamètre de l'orifice.

Nous allons examiner si ces deux lois elles-mêmes découlent aussi de notre explication.

§ 434. Imaginons, pour un instant, que la pesanteur cesse d'agir sur le liquide dès que celui-ci franchit la section contractée. Alors, à partir de cette section, la vitesse de translation sera simplement celle qui est due à la charge, et qui a, comme on sait, pour valeur $\sqrt{2gh}$, g désignant la pesanteur, et h la charge. Cette vitesse sera uniforme, et, par conséquent, si la veine n'avait pas de tendance à se diviser, elle demeurerait exactement cylindrique sur une étendue quelconque (§ 431). Maintenant, toutes les parties du liquide étant animées de la même vitesse de translation, ce mouvement commun ne pourra influer sur l'effet des actions figuratrices ; de sorte que, par exemple, les modifications graduelles que subira chacun des étranglements, et le temps qu'il mettra à les accomplir, seront indépendants de la vitesse de translation.

Cela posé, considérons la tranche liquide infiniment mince qui doit constituer le cercle de gorge d'un étranglement, à partir de l'instant où elle quitte la section contractée. Cette tranche descendra avec une vitesse constante, et, en même temps, son diamètre ira en diminuant, jusqu'à ce que l'étranglement auquel elle appartient se transforme en filet, et alors la tranche dont il s'agit occupera le milieu de ce filet; puis le filet se désunira pour se convertir en sphérules. Comme nous l'avons fait voir ci-dessus, le temps employé à l'accomplissement de ces phénomènes, et pendant lequel la tranche liquide que nous avons considérée a parcouru la distance comprise entre la section contractée et le lieu qu'occupe le milieu du filet à l'instant précis de la rupture, est indépendant de la vitesse de translation, et, par conséquent, si le diamètre de l'orifice ne change pas, ce temps sera constant quelle que soit la charge. Or, dans un mouvement uniforme, l'espace parcouru pendant un temps déterminé étant proportionnel à la vitesse, la distance ci-dessus sera proportionnelle à $\sqrt{2gh}$, et, par suite, à $\sqrt{h}$. Comme nous aurons souvent à faire usage de cette même distance, nous la représenterons, pour abréger, par D.

Maintenant, il est aisé de comprendre que, dans notre veine, la longueur de la partie continue ne diffère pas sensiblement de la distance D. En effet, la partie continue se termine à l'endroit précis où vient se produire, dans chaque filet, le plus élevé des points de rupture de celui-ci : car, à l'instant où la rupture s'effectue, tout ce qu'il y a au-dessus du point dont il s'agit se trouve dans des phases moins avancées de la transformation (§ 431), et possède, par conséquent, encore la continuité, tandis que tout ce qu'il y a au-dessous de ce même point est nécessairement déjà discontinu. Ainsi, d'une part, la partie continue de la veine commence à l'orifice et se termine à l'endroit où vient se produire le point de rupture le plus élevé de chaque filet; et, d'autre part, la distance D commence à la section contractée et se termine au point correspondant au milieu de la longueur de chacun des filets à l'instant de leur rupture. La partie continue prend donc son origine un peu plus haut, mais aussi se termine un peu moins bas, que la distance D;

la différence des origines de ces deux grandeurs et celle de leurs terminaisons doivent, par conséquent, se compenser en partie; et comme ces différences sont toutes deux fort petites, l'excès de l'une sur l'autre sera, à plus forte raison, très-minime, de sorte que les deux grandeurs auxquelles elles se rapportent pourront, ainsi que je l'ai dit, être regardées sans erreur sensible comme égales entre elles.

En vertu de cette égalité, la longueur de la partie continue de la veine que nous considérons suivra donc sensiblement la même loi que la distance D, c'est-à-dire qu'elle sera à fort peu près proportionnelle à $\sqrt{h}$.

Ainsi, dans le cas imaginaire d'une vitesse de translation uniforme, nous retrouvons la première des lois données par Savart. Or il est clair que, dans une veine réelle, la vitesse s'écartera d'autant moins de l'uniformité que la charge sera plus considérable; d'où l'on peut inférer que, pour des charges suffisamment grandes, la longueur de la partie continue de la veine réelle devra encore suivre sensiblement cette loi. C'est d'ailleurs ce que nous allons démontrer d'une manière rigoureuse.

§ 435. Plaçons-nous donc dans le cas réel, c'est-à-dire considérons une veine soumise à l'action de la pesanteur, et dans laquelle, par conséquent, le mouvement de translation est accéléré. Alors, la vitesse que possède, après un temps t quelconque, une tranche horizontale du liquide emportée par le mouvement de translation, aura pour valeur $\sqrt{2gh} + gt$, le premier terme représentant la portion de la vitesse due à la charge, le second la portion due à l'action de la pesanteur sur la veine, et t étant compté à partir du moment où la tranche liquide franchit la section contractée. Rappelons ici qu'en vertu de l'accélération de la vitesse, la veine, si elle ne se divisait point, irait en s'amincissant indéfiniment de haut en bas (§ 431).

Cela posé, concevons que, sous la même charge et par un autre orifice de même diamètre, s'écoule, en même temps que la veine réelle dont il s'agit, une autre veine de même liquide placée dans la condition imaginaire du paragraphe précédent. Soit θ le temps employé dans cette seconde veine à parcourir la distance que nous avons désignée par D, c'est-à-dire celui qui se trouve compris entre l'instant où la tranche liquide qui doit constituer le cercle de gorge d'un étranglement passe à la section contractée, et l'instant de la rupture du filet dans lequel cet étranglement s'est transformé. Faisons, dans l'expression de la vitesse relative à la première veine, $t = \theta$, ce qui donne, pour cette vitesse après le temps θ, la valeur $\sqrt{2gh} + g\theta$; en d'autres termes, considérons la vitesse d'une tranche liquide appartenant à la veine réelle, après le temps nécessaire pour qu'une tranche appartenant à la veine imaginaire ait parcouru la distance D. D'après ce que nous avons vu dans le paragraphe précédent, si l'orifice demeure le même, ce temps est constant, quelle que soit la charge, en sorte que, dans l'expression ci-dessus, le terme $g\theta$ reste invariable quand on fait varier h. Nous pourrons donc, quelle que soit la valeur de θ, supposer la charge h assez considérable pour que le terme $\sqrt{2gh}$ soit très-grand relativement au terme $g\theta$, et que ce dernier puisse, par conséquent, être négligé sans erreur sensible. Pour une valeur de h qui réalisera cette condition, et, à plus forte raison, pour toutes les valeurs plus grandes encore, la vitesse d'une tranche de la veine réelle pendant le temps θ pourra être regardée comme constante et égale à celle d'une tranche de la veine imaginaire; de sorte que, dans tout l'espace parcouru par la première pendant ce même temps à partir de la section contractée, la veine réelle, si elle ne se divisait pas, diminuerait fort peu en diamètre, et pourrait être regardée comme identique avec la veine imaginaire supposée également sans divisions.

Maintenant, il suit nécessairement de cette quasi-identité, que, pendant le temps θ, tout se passera sensiblement de la même manière dans les deux veines ; par conséquent, le temps θ sera aussi à fort peu près celui qu'emploiera, dans la veine réelle, la tranche liquide correspondante au cercle de gorge d'un étranglement, pour accomplir les modifications que nous avons considérées, et l'espace qu'elle parcourra pendant ces modifications, pourra être regardé comme égal à la distance D relative à la veine imaginaire.

Or, puisque la partie continue de la veine réelle se termine un peu moins bas que cet espace, et se trouve, par suite, comprise dans la même portion de la veine, il suit encore de l'identité approchée ci-dessus, que cette partie continue différera à peine en longueur de celle de la veine imaginaire, et que, par conséquent, à partir de la moindre des charges considérées plus haut, les longueurs des parties continues des deux veines devront être régies à fort peu près par la même loi.

Nous arrivons donc enfin à cette conclusion, que, pour un même orifice, et à partir d'une charge inférieure suffisamment grande, la longueur de la partie continue de la veine réelle doit être sensiblement proportionnelle à la racine carrée de la charge.

En conséquence de la démonstration précédente, la charge inférieure dont il s'agit est celle sous laquelle le mouvement de translation du liquide commence à demeurer presque uniforme dans toute la partie continue de la veine réelle.

Ainsi, sous la condition d'une charge inférieure suffisante pour produire cette uniformité approchée, condition toujours réalisable, la loi indiquée par Savart comme établissant la relation entre la longueur de la partie continue et la charge, découle d'une manière nécessaire des propriétés des cylindres liquides.

Pour découvrir si cette loi doit encore être vraie lorsqu'on emploie des charges plus faibles, il faut partir d'autres considérations; mais nous voyons dès à présent que si, dans ce dernier cas, la loi est différente, elle doit du moins nécessairement converger vers la proportionnalité dont il s'agit à mesure qu'on augmente la charge.

Remarquons ici que, pour un liquide donné, la charge sous laquelle la veine commence à se trouver dans la condition que nous avons déterminée, doit être d'autant moins considérable que le diamètre de l'orifice est plus petit. En effet, puisque, toutes choses égales d'ailleurs, la transformation d'un cylindre liquide s'effectue d'autant plus rapidement que le diamètre du cylindre est moindre, il en résulte que la valeur de θ diminuera avec le diamètre de l'orifice, et que, par conséquent, plus celui-ci sera petit, moins la valeur de h devra être considérable pour que, dans l'expression $\sqrt{2gh} + g\theta$ posée au commencement de ce paragraphe, le terme $g\theta$ soit négligeable à côté du terme $\sqrt{2gh}$, et, par suite, pour que la veine se trouve dans la condition dont il s'agit.

En outre, comme le temps θ varie avec la nature du liquide, il en sera nécessairement de même de la charge que nous considérons.

§ 436. Occupons-nous actuellement de la seconde loi, c'est-à-dire de celle qui établit la proportionnalité approchée entre la longueur de la partie continue de la veine et le diamètre de l'orifice lorsque la charge demeure la même.

Reprenons, pour un instant, le cas imaginaire d'un mouvement de translation absolument uniforme. Alors la veine constituera, abstraction faite de ses divisions, un cylindre exact à partir de la section contractée, cylindre qui sera formé dans l'air, et libre sur toute sa surface convexe; en outre, le mouvement de translation du liquide étant sans influence sur l'effet des actions figuratrices, et aucune cause étrangère ne tendant à modifier la longueur des divisions, celles-ci prendront nécessairement leur longueur normale. On voit donc que, sauf la non-simultanéité de la formation de ses divisions, notre veine imaginaire se trouvera précisément dans les mêmes conditions que les cylindres auxquels se rapportent les lois récapitulées dans le § 384; par conséquent, si nous considérons en particulier l'un des étranglements de cette veine, il devra passer par les mêmes formes, et accomplir ses modifications dans le même temps, que l'un quelconque des étranglements qui résulteraient de la transformation d'un cylindre de même diamètre que la veine, formé du même liquide, et placé dans les conditions dont il s'agit.

Maintenant, le temps compris entre l'origine de la transformation et l'instant de la rupture des filets, est, d'après l'une de nos lois, exactement ou sensiblement proportionnel au diamètre du cylindre; et il est clair que cette loi s'applique tout aussi bien à l'un des étranglements en particulier, ou même simplement à son cercle de gorge, qu'à l'ensemble de la figure. Conséquemment, dans notre veine imaginaire, le temps qu'emploiera le cercle de gorge de chacun des étranglements pour arriver à l'instant de la rupture du filet, sera exactement ou sensiblement proportionnel au diamètre qu'aurait la veine s'il ne s'y produisait pas de divisions, c'est-à-dire à celui de la section contractée. Or la forme cylindrique de la veine supposée sans divisions ne commençant qu'à la section contractée, ce n'est aussi qu'à partir de là que commencent les actions figuratrices provenant de l'instabilité de cette même forme cylindrique. Il faut donc admettre que la tranche liquide qui doit constituer le cercle de gorge d'un étranglement, ne commence à éprouver les modifications qui résultent de la transformation, qu'à partir de l'instant où elle franchit la section contractée; ainsi, le temps que nous considérons prend naissance à ce même instant.

Mais ce temps compris entre l'instant où passe à la section contractée la tranche liquide qui doit constituer le cercle de gorge d'un étranglement et l'instant de la rupture du filet dans lequel cet étranglement se convertit, est celui que nous avons désigné par θ, et pendant lequel la tranche liquide parcourt la distance D; dans notre veine imaginaire, le temps θ sera donc proportionnel au diamètre de la section contractée. D'un autre côté, le mouvement de translation étant supposé uniforme, la distance D sera proportionnelle au temps θ employé à la parcourir. Donc, en vertu de ces deux lois, la distance D sera proportionnelle au diamètre de la section contractée. Enfin, puisque la distance D ne diffère pas sensiblement de la longueur de la partie continue de la veine, cette longueur sera également proportionnelle au diamètre de la section contractée.

Maintenant on sait que, dans une veine liquide, le diamètre de la section contractée peut être considéré comme proportionnel à celui de l'orifice quand ce dernier chée entre la longueur de la partie continue de la veine et le diamètre de l'orifice lorsque la charge demeure la même.

Reprenons, pour un instant, le cas imaginaire d'un mouvement de translation absolument uniforme. Alors la veine constituera, abstraction faite de ses divisions, un cylindre exact à partir de la section contractée, cylindre qui sera formé dans l'air, et libre sur toute sa surface convexe ; en outre, le mouvement de translation du liquide étant sans influence sur l'effet des actions figuratrices, et aucune cause étrangère ne tendant à modifier la longueur des divisions, celles-ci prendront nécessairement leur longueur normale. On voit donc que, sauf la non-simultanéité de la formation de ses divisions, notre veine imaginaire se trouvera précisément dans les mêmes conditions que les cylindres auxquels se rapportent les lois récapitulées dans le § 384 ; par conséquent, si nous considérons en particulier l'un des étranglements de cette veine, il devra passer par les mêmes formes, et accomplir ses modifications dans le même temps, que l'un quelconque des étranglements qui résulteraient de la transformation d'un cylindre de même diamètre que la veine, formé du même liquide, et placé dans les conditions dont il s'agit.

Maintenant, le temps compris entre l'origine de la transformation et l'instant de la rupture des filets, est, d'après l'une de nos lois, exactement ou sensiblement proportionnel au diamètre du cylindre ; et il est clair que cette loi s'applique tout aussi bien à l'un des étranglements en particulier, ou même simplement à son cercle de gorge, qu'à l'ensemble de la figure. Conséquemment, dans notre veine imaginaire, le temps qu'emploiera le cercle de gorge de chacun des étranglements pour arriver à l'instant de la rupture du filet, sera exactement ou sensiblement proportionnel au diamètre qu'aurait la veine s'il ne s'y produisait pas de divisions, c'est-à-dire à celui de la section contractée. Or la forme cylindrique de la veine supposée sans divisions ne commençant qu'à la section contractée, ce n'est aussi qu'à partir de là que commencent les actions figuratrices provenant de l'instabilité de cette même forme cylindrique. Il faut donc admettre que la tranche liquide qui doit constituer le cercle de gorge d'un étranglement, ne commence à éprouver les modifications qui résultent de la transformation, qu'à partir de l'instant où elle franchit la section contractée; ainsi, le temps que nous considérons prend naissance à ce même instant.

Mais ce temps compris entre l'instant où passe à la section contractée la tranche liquide qui doit constituer le cercle de gorge d'un étranglement et l'instant de la rupture du filet dans lequel cet étranglement se convertit, est celui que nous avons désigné par θ, et pendant lequel la tranche liquide parcourt la distance D; dans notre veine imaginaire, le temps θ sera donc proportionnel au diamètre de la section contractée. D'un autre côté, le mouvement de translation étant supposé uniforme, la distance D sera proportionnelle au temps θ employé à la parcourir. Donc, en vertu de ces deux lois, la distance D sera proportionnelle au diamètre de la section contractée. Enfin, puisque la distance D ne diffère pas sensiblement de la longueur de la partie continue de la veine, cette longueur sera également proportionnelle au diamètre de la section contractée.

Maintenant on sait que, dans une veine liquide, le diamètre de la section contractée peut être considéré comme proportionnel à celui de l'orifice quand ce dernier surpasse dix millimètres, et qu'au-dessous de cette limite, la proportionnalité ne s'altère d'une manière bien notable, que lorsque le diamètre de l'orifice devient inférieur à un millimètre(1). D'ailleurs, comme cette altération est attribuée à l'influence qu'exerce l'épaisseur, quoique très-petite, des bords de l'orifice, il est probable qu'on la rendra moindre encore, en employant, ainsi que l'a fait Savart, des orifices évasés extérieurement, orifices qui peuvent être taillés de manière à avoir leurs bords fort tranchants. Ainsi, avec des orifices convenablement travaillés, on pourra sans doute, à partir d'un diamètre égal au plus à un millimètre, admettre, sans erreur notable, que le diamètre de la section contractée est proportionnel à celui de l'orifice.

D'après cela, puisque la longueur de la partie continue de notre veine imaginaire est proportionnelle au diamètre de la section contractée, elle sera également proportionnelle au diamètre de l'orifice, du moins à partir d'une valeur inférieure de ce dernier, qui ne soit pas de beaucoup au-dessous d'un millimètre.

Si actuellement de la veine imaginaire nous passons à la veine réelle, nous n'avons qu'à supposer à la charge constante une valeur assez considérable pour que, dans toute l'étendue que nous assignerons aux variations du diamètre de l'orifice, la condition posée dans le paragraphe précédent soit satisfaite, de manière que, pour chacune des valeurs données à ce diamètre, la partie continue de la veine réelle ait sensiblement la même

(1) En effet, on déduit des résultats obtenus par Hachette (*Ann. de chim. et de phys. de Paris*, t. III, p. 78), que, pour un diamètre d'orifice égal ou supérieur à 10^{mm}, le rapport entre le diamètre de la section contractée et celui de l'orifice est, en moyenne, 0,78 ; qu'en passant de 10^{mm} à 1^{mm}, le rapport n'augmente que jusqu'à 0,83; et enfin, que, pour un diamètre égal à $0^{mm},55$, le rapport devient 0,88.

longueur que celle de la veine imaginaire correspondante; alors la loi qui régit cette longueur pourra être regardée comme la même dans les deux espèces de veines. D'après la première des deux remarques qui terminent le paragraphe précédent, on voit que si la charge commune remplit la condition dont il s'agit à l'égard de la plus grande des valeurs que l'on assigne au diamètre de l'orifice, elle la remplira, à plus forte raison, à l'égard de toutes les autres.

Nous sommes donc conduits à cette conclusion définitive : si, pour une même charge, on donne au diamètre de l'orifice des valeurs croissantes, depuis une valeur peu inférieure à un millimètre jusqu'à une autre valeur déterminée quelconque, et si la charge commune est suffisamment grande, la longueur de la partie continue de la veine sera proportionnelle au diamètre de l'orifice.

Ainsi la seconde des lois données par Savart découle encore, d'une manière nécessaire, des propriétés des cylindres liquides; et l'on voit, de même, que si, dans le cas d'une charge commune peu considérable, la loi se modifie, elle doit converger vers celle de Savart à mesure qu'on donnera à cette charge une valeur plus grande.

§ 437. Plaçons-nous maintenant en deçà de la limite à partir de laquelle la veine réelle peut être assimilée, dans sa partie continue, à la veine imaginaire correspondante; en d'autres termes, supposons la charge assez peu considérable ou le diamètre de l'orifice assez grand, pour que, dans l'étendue de la partie continue de la veine réelle, le mouvement de translation ne soit plus sensiblement uniforme. Alors aussi la veine tendra à s'amincir du haut en bas, et cet amincissement deviendra visible sur la portion limpide. La question des lois qui doivent, dans ces circonstances, régir la longueur de la partie continue, est assez compliquée; nous allons cependant tâcher de l'éclaircir.

Considérons une division de la veine à l'instant où son extrémité supérieure passe à la section contractée. Les deux tranches liquides entre lesquelles la division dont il s'agit se trouve comprise, partent de cette position avec des vitesses différentes: car, dans le petit trajet qu'a parcouru la tranche inférieure, sa vitesse s'est déjà un peu accrue par l'action de la pesanteur. Or il suit de cet excès de vitesse et de l'accélération du mouvement, que les deux tranches iront en s'éloignant de plus en plus l'une de l'autre à mesure qu'elles descendront, ou, en d'autres termes, que la portion de liquide comprise entre elles s'allongera graduellement pendant son mouvement de translation. Par conséquent, ainsi que je l'ai déjà indiqué au § 431, chacune des divisions, emportée avec la vitesse accélérée du liquide, augmentera graduellement en longueur jusqu'à l'instant de la rupture du filet, et conservera pendant sa descente un volume constant.

Dans ce cas, il est aisé de reconnaître deux genres d'influences, agissant en sens opposés sur la loi qui régit la longueur de la partie continue quand on fait varier la charge.

D'abord rappelons-nous que si le mouvement de translation était uniforme, la proportionnalité à la racine carrée de la charge serait toujours satisfaite, même à partir de charges très-faibles (§ 434). Maintenant, si les divisions descendent avec la vitesse accélérée du liquide, et si l'on suppose qu'il ne résulte de là aucun changement dans la durée de leur transformation, elles parcourront pendant cette durée un espace plus considérable, en sorte que la partie continue sera plus longue, que si l'accélération n'existait pas, et l'excès, comparé à la longueur qu'aurait la partie continue dans le cas du mouvement uniforme, sera notable sous une charge faible ou modérée, tandis qu'il sera négligeable sous une charge très-forte, celle-ci rendant le mouvement de translation dans la partie continue sensiblement uniforme. D'après cela, quand on passera de la première de ces deux charges à la seconde, le rapport des longueurs des parties continues qui leur correspondent respectivement sera plus rapproché de l'unité qu'il ne le serait si l'accélération était nulle, c'est-à-dire plus rapproché de l'unité que celui des racines carrées des charges.

Mais, ainsi qu'on l'a vu plus haut, les divisions ne peuvent descendre d'un mouvement accéléré sans s'allonger en même temps, et de là naît, nous le savons (§§ 381 et 407), une cause de diminution dans la durée de la transformation. Cette deuxième influence, savoir la diminution dans la durée de la transformation, diminution qui doit être d'autant plus prononcée que la vitesse de translation approche moins de l'uniformité, ou que la charge est plus faible, agit évidemment pour rendre la loi plus rapide que la proportionnalité à la racine carrée de la charge, et elle est conséquemment opposée à la première.

§ 438. En résumé donc, pour des charges moins considérables que celles qui rendraient le mouvement de translation du liquide sensiblement uniforme dans la partie continue de la veine, deux genres opposés d'influences agissent sur la loi suivant laquelle la longueur de cette partie continue varie avec la charge, le premier tendant à faire croître cette même longueur moins rapidement que la racine carrée de la charge, et le second tendant, au contraire, à la faire croître plus rapidement. Or, en vertu de leur opposition, ces deux genres d'influences se neutraliseront mutuellement en plus ou moins grande proportion ; mais on doit regarder comme très-peu vraisemblable que la neutralisation soit complète ; ce qui nous conduit à cette première conclusion, que, sous des charges suffisamment faibles, la loi dont nous nous occupons s'écartera très-probablement de celle de Savart; seulement il serait impossible de décider a priori dans quel sens.

En deuxième lieu, les influences que nous avons signalées ayant leur cause dans l'accélération du mouvement du liquide, il est clair que l'action de chacune d'elles, considérée isolément, décroît à mesure que l'on augmente la charge, et devient négligeable à partir de la première des charges sous lesquelles le mouvement du liquide devient sensiblement uniforme dans la partie continue. Or ce qui reste de la neutralisation mutuelle des deux actions opposées est nécessairement moindre, et probablement de beaucoup, que chacune d'elles en particulier, d'où il est à croire que cet excès deviendra négligeable à partir d'une charge beaucoup moins grande. Nous arrivons donc à cette seconde conclusion, que la première loi de Savart commencera sans doute à être vraie à partir d'une charge qui laissera encore au mouvement de translation du liquide dans la partie continue une accélération très-notable.

Enfin, ce résultat combiné avec un principe que nous avons établi en terminant le § 435, nous fournit une troisième conclusion, savoir que la charge à partir de laquelle la veine commence en réalité à satisfaire à la première loi de Savart, sera d'autant plus faible que l'orifice sera plus petit : car il est évident qu'en passant d'un orifice à un autre, cette charge doit varier dans le même sens que celle à partir de laquelle l'accélération du mouvement du liquide devient négligeable. Mais je dis, de plus, que la variation dont il s'agit aura très-probablement lieu dans un rapport beaucoup plus grand que celui des diamètres des orifices. En effet, soit h' la charge sous laquelle commence, pour un orifice et un liquide donnés, l'uniformité approchée du mouvement de translation, et θ' la valeur correspondante de θ. La charge h' devra être telle, comme nous l'avons vu, que $\sqrt{2gh'}$ soit très-considérable relativement à $g\theta'$, ou, en d'autres termes, que le rapport $\frac{\sqrt{2gh'}}{g\theta'}$ soit très-grand. Prenons maintenant un orifice d'un diamètre moindre, et désignons par h'' la charge qui remplit, à l'égard de ce second orifice, la même condition que h' à l'égard du premier; soit aussi θ'' ce que devient θ pour le nouvel orifice. Si nous voulons que, dans la partie continue de la veine qui s'écoule par celui-ci, le mouvement du liquide ait le même degré d'uniformité que dans la partie continue de la précédente, nous devrons évidemment poser

$$\frac{\sqrt{2gh'}}{g\theta'} = \frac{\sqrt{2gh''}}{g\theta''},$$

ce qui donne

$$\frac{\sqrt{h'}}{\sqrt{h''}} = \frac{\theta'}{\theta''},$$

et, par conséquent,

$$\frac{h'}{h''} = \frac{\theta'^2}{\theta''^2}.$$

Mais le temps θ est proportionnel au diamètre de la section contractée, et, par suite, à celui de l'orifice

(§ 436) ; donc, au rapport $\frac{\theta'^2}{\theta''^2}$, on peut substituer celui des carrés des diamètres des deux orifices; d'où il résulte qu'en passant d'un orifice déterminé à un orifice moindre, la charge que nous considérons décroîtra comme le carré du diamètre de l'orifice. Or on doit regarder comme bien probable que la charge beaucoup plus faible à partir de laquelle la loi de Savart commence à se réaliser, décroîtra d'une manière analogue, c'est-à-dire dans un rapport de beaucoup supérieur à celui des diamètres.

§ 439. Passons à l'autre loi, c'est-à-dire à celle qui régit la longueur de la partie continue quand on fait varier le diamètre de l'orifice. Je dis, en premier lieu, que cette loi coïncidera avec la seconde de celles de Savart, lorsqu'on donnera à la charge commune la valeur à partir de laquelle la veine sortant par le plus grand des orifices employés commencerait en réalité à satisfaire à la première de ces lois.

En effet, remarquons d'abord que, sous la charge dont il s'agit, charge que nous désignerons par h_1, les veines sortant par tous les orifices moindres se trouveront, à plus forte raison, dans les conditions effectives de la première loi : c'est ce qui résulte de la troisième conclusion du paragraphe précédent. Par conséquent, si nous substituons, pour un instant, à cette charge h_1 une charge assez considérable pour rendre la vitesse du liquide sensiblement uniforme dans toutes les parties continues, et si nous repassons de cette seconde charge à la précédente, les longueurs respectives des parties continues décroîtront toutes dans un même rapport, savoir dans celui des racines carrées des deux charges. Or, sous la plus grande de celles-ci, les longueurs dont il s'agit étaient entre elles comme les diamètres des orifices correspondants (§ 436) ; donc il en sera encore de même sous la charge h_1, et, par conséquent, sous cette charge, la seconde loi de Savart sera satisfaite.

En deuxième lieu, je dis que sous une charge inférieure à h_1, il n'en sera plus ainsi. Pour le faire voir, soit h_2 cette nouvelle charge, et désignons par h_3 la charge qui remplit, à l'égard de la veine sortant par le plus petit orifice, le même rôle que remplit h_1 à l'égard de celle qui sort par le plus grand. Rappelons-nous que h_3 est inférieure à h_1, et supposons h_2 comprise entre ces deux dernières. Alors, par conséquent, sous les charges h_1 et h_2, la veine sortant par le plus petit orifice se trouvera encore dans les conditions effectives de la première loi de Savart, tandis que, pour la veine qui sort par le plus grand orifice, ces conditions ne commencent qu'à partir de h_1 ; si donc nous passons de h_1 à h_2, la partie continue de la première veine décroîtra dans le rapport des racines carrées de ces deux charges ; mais celle de la dernière veine décroîtra dans un rapport différent. Or, sous la charge h_1, ces deux longueurs étaient entre elles comme les diamètres des orifices correspondants ; donc, sous la charge h_2, elles se trouveront dans un autre rapport, et, par conséqnent, la seconde loi de Savart ne sera plus satisfaite, du moins quant à ces deux veines extrêmes de la série comparées entre elles.

De tout cela résultent ces nouvelles conclusions : sous une charge commune suffisamment faible, la proportionnalité entre la longueur de la partie continue et le diamètre de l'orifice n'a plus lieu dans l'étendue totale que l'on assigne aux variations de ce diamètre ; mais elle commence à se manifester lorsqu'on donne à la charge commune la valeur pour laquelle la veine sortant par le plus grand des orifices commence à se trouver dans les conditions effectives de la première loi de Savart.

Or nous allons voir que ces conclusions, ainsi que celles du paragraphe précédent, sont d'accord avec les résultats de l'expérience.

§ 440. Savart a fait, sur des veines d'eau soustraites à toute action étrangère, deux séries d'observations, l'une avec un orifice de six millimètres de diamètre, et l'autre avec un orifice de trois millimètres ; les charges successives étaient les mêmes dans les deux séries. Les deux tableaux ci-dessous reproduisent les résultats obtenus, c'est-à-dire les longueurs de la partie continue correspondantes aux charges successives ; ces longueurs ainsi que les charges sont exprimées en centimètres. J'ai placé, dans chaque tableau, une troisième colonne renfermant, en regard de chacune des longueurs de la partie continue, le rapport de celle-ci à la racine carrée de la charge correspondante.

DIAMÈTRE DE L'ORIFICE, 6mm.		
CHARGES.	LONGUEURS de la PARTIE CONTINUE.	RAPPORTS à la RACINE CARRÉE DE LA CHARGE.
4,5	107	50,4
12	126	36,4
27	143	27,5
47	158	23,0

DIAMÈTRE DE L'ORIFICE, 3mm.		
CHARGES.	LONGUEURS de la PARTIE CONTINUE.	RAPPORTS à la RACINE CARRÉE DE LA CHARGE.
4,5	24	11,3
12	39	11,3
27	58	11,2
47	78	11,4

Avant de discuter ces tableaux, remarquons ici que toutes les longueurs de la partie continue sont exprimées en nombres entiers, ce qui montre que Savart a pris pour chacune d'elles le nombre entier de centimètres le plus approchant, sans tenir compte de la fraction ; d'ailleurs, ainsi que nous le verrons (§ 487), dans de semblables veines, la partie continue éprouve incessamment de petites variations de longueur ; il résulte donc de là que les longueurs données dans ces mêmes tableaux ne peuvent être en général qu'approximatives.

Cela posé, commençons par examiner le tableau relatif à l'orifice de 6^{mm}. On voit que le rapport entre la longueur de la partie continue et la racine carrée de la charge décroit considérablement de la première charge à la dernière ; d'où il suit que, dans le cas d'une veine d'eau sortant par un orifice de 6^{mm} de diamètre, si l'on ne fait croître la charge que jusqu'à 47 centimètres, la première loi de Savart est loin d'être satisfaite. Ainsi, la première conclusion du § 438 est conforme à l'expérience. De plus, le décroissement du rapport établit le sens dans lequel la loi réelle s'écarte de la loi de Savart, en deçà de la limite où celle-ci commence à être suffisamment approchée : on voit qu'alors la longueur de la partie continue augmente moins rapidement que la racine carrée de la charge.

En second lieu, d'après la marche du rapport dont il s'agit, on reconnaît que celui-ci converge vers une certaine limite, qui doit être peu au-dessous de 23, c'est-à-dire de la valeur correspondante à la charge de 47 centimètres. En effet, tandis que la charge reçoit des accroissements successifs de 7,5, de 15, et de 20 centimètres, le rapport diminue successivement de 14, de 8,9, et de 4,5 unités, et cette dernière différence est déjà assez peu considérable relativement à la valeur du dernier rapport ; d'où l'on doit présumer que si l'on augmentait encore la charge, le décroissement ultérieur du rapport serait fort petit, et que l'on atteindrait bientôt une limite sensiblement constante, limite à partir de laquelle la première loi de Savart serait satisfaite.

D'après cela, cherchons quel est, pour la veine qui s'écoule sous la charge de 47 centimètres, le rapport entre les vitesses de translation du liquide à l'extrémité de la partie continue et à la section contractée. En négligeant le petit intervalle compris entre l'orifice et la section contractée, nous aurons pour la vitesse dont il s'agit à une distance quelconque l de cette section, la valeur $\sqrt{2g(h+l)}$; si donc l désigne la longueur de la partie continue, le rapport des vitesses à l'extrémité de cette longueur et à la section contractée sera exprimé d'une manière générale par $\frac{\sqrt{2g(h+l)}}{\sqrt{2gh}}$, ou plus simplement par $\sqrt{\frac{h+l}{h}}$. Maintenant, en substituant dans cette expression pour h et l les valeurs relatives à la veine dont nous nous occupons, savoir 47 et 158, nous trouvons pour le rapport entre les vitesses extrêmes, la valeur 2,1. Ainsi, bien que, sous une charge de 47 centimètres, la veine sortant par un orifice de 6^{mm} soit probablement près de se trouver dans les conditions effectives de la première loi de Savart, la vitesse à l'extrémité de sa partie continue est encore plus que double de la vitesse à la section contractée, de sorte que le mouvement de translation du liquide est encore très-notablement accéléré. La seconde conclusion du § 438 paraît donc jusqu'ici s'accorder, comme la première, avec les résultats de l'expérience.

Passons au tableau relatif à l'orifice de 3^{mm}. Ici, comme on voit, le rapport entre la longueur de la partie continue et la racine carrée de la charge est, à fort peu près, le même pour toutes les charges; d'où il suit qu'avec cet orifice, la veine commence déjà à se trouver dans les conditions effectives de la première loi de Savart, sous une charge de 4,5 centimètres. Mais, d'après ce qui précède, avec l'orifice de 6^{mm}, la veine n'entre dans ces mêmes conditions que sous une charge au moins égale à 47 centimètres ; donc la charge à partir de laquelle la première loi de Savart commence à se réaliser, augmente et diminue avec le diamètre de l'orifice, et beaucoup plus rapidement que ce diamètre ; or, c'est en cela que consiste la troisième conclusion du § 438.

Enfin, si, dans l'expression générale du rapport des vitesses extrêmes trouvée plus haut, nous remplaçons h et l par les valeurs 4,5 et 24 relatives à la première veine du tableau dont nous nous occupons, nous trouverons, pour ce rapport, la valeur 2,5; ce qui montre qu'avec la charge, 4,5, sous laquelle la veine est déjà dans les conditions effectives de la loi de Savart, la vitesse de translation du liquide est encore très-notablement accélérée. D'après cela, il ne peut plus demeurer aucun doute sur la légitimité de la seconde conclusion du § 438.

Calculons maintenant, pour chacune des quatre charges, le rapport entre les longueurs des parties continues respectivement correspondantes aux deux orifices; nous formerons ainsi le tableau suivant :

CHARGES.	RAPPORTS.
4,5	4,46
12	3,23
27	2,46
47	2,03

Ce tableau montre que, pour des charges inférieures à 47 centimètres, le rapport entre les longueurs respectives des parties continues de deux veines d'eau sortant, l'une par un orifice de 6 millimètres de diamètre, et l'autre par un orifice d'un diamètre moitié moindre, est loin d'être le même que celui des diamètres ; d'où il suit que, sous ces charges, la seconde loi de Savart n'est pas satisfaite. Mais on voit, en même temps, que ce rapport converge vers celui des diamètres à mesure qu'on augmente la charge, et que, sous la charge de 47 centimètres, il est près de l'atteindre ; or, d'après ce que nous avons vu plus haut, sous cette même charge de 47 centimètres, la veine sortant par le plus grand des deux orifices est très-probablement près d'atteindre les conditions effectives de la première loi de Savart. Les conclusions du paragraphe précédent paraissent donc s'accorder, comme celles du § 438, avec les résultats de l'observation. Nous allons voir, du reste, cet accord confirmé par les résultats obtenus avec des veines d'eau non soustraites aux actions étrangères.

§ 441. Ces actions étrangères, dont nous reparlerons au § 455, et qui consistent dans certains mouvements vibratoires plus ou moins réguliers transmis aux veines, paraissent ne pas altérer les lois dont nous nous occupons considérées dans leur généralité ; mais elles déterminent un raccourcissement des parties continues, et produisent en cela le même effet qu'une diminution des diamètres des orifices, de sorte que, sous leur influence, les lois de Savart commencent à se réaliser à partir de charges plus faibles.

Je viens de dire que les lois complètes qui régissent la partie continue, paraissent ne pas être changées par les actions étrangères dont il s'agit ; c'est ce que l'on reconnaîtra aisément, si, pour chacune des séries faites par Savart sous l'influence de ces mêmes actions, séries dans lesquelles les orifices, les charges et le liquide sont les mêmes que précédemment, on forme le tableau des rapports entre la longueur de la partie continue et la racine carrée de la charge. A travers les petits écarts provenant des irrégularités inhérentes aux actions étrangères, on verra : 1° qu'avec l'orifice de 6^{mm}, le rapport commence encore par décroître, et converge vers une certaine limite ; seulement ici le décroissement est moindre par la raison que j'ai donnée plus haut, et la limite paraît être atteinte sous une charge inférieure à 47 centimètres; 2° qu'avec l'orifice de 3^{mm}, le rapport est sensiblement constant.

D'après cela, les séries dont il s'agit peuvent donc servir aussi à la discussion des lois qui régissent la longueur de la partie continue. Je me bornerai à reproduire ici deux de ces mêmes séries : ce sont celles que Savart a prises pour type, et d'où il a déduit ses lois; voici les tableaux qui s'y rapportent :

DIAMÈTRE DE L'ORIFICE, 6^{mm}.		
CHARGES.	LONGUEURS de la PARTIE CONTINUE.	RAPPORTS à la RACINE CARRÉE DE LA CHARGE.
4,5	40	18,9
12	59	17,0
27	82	15,8
47	112	16,3

DIAMÈTRE DE L'ORIFICE, 3^{mm}.		
CHARGES.	LONGUEURS de la PARTIE CONTINUE.	RAPPORTS à la RACINE CARRÉE DE LA CHARGE.
4,5	16	7,5
12	25	7,2
27	41	7,9
47	55	8,0

et l'on voit, par le premier, qu'avec l'orifice de 6^{mm}, le rapport entre la longueur de la partie continue et la racine carrée de la charge paraît avoir déjà atteint sa limite sous la charge de 27 centimètres; le petit accroissement qui se manifeste pour la charge suivante, est dû sans doute aux causes d'irrégularité que j'ai signalées.

Calculons encore, pour ces deux séries, les rapports entre les longueurs respectivement correspondantes aux deux orifices, ce qui nous donne le tableau snivant:

CHARGES.	RAPPORTS.
4,5	2,50
12	2,36
27	2,00
47	2,04

C'est donc aussi sous la charge de 27 centimètres, que le rapport entre les longueurs des parties continues se trouve avoir atteint celui des diamètres des orifices, ce qui achève d'établir la conformité des conclusions du § 439 avec les résultats de l'observation.

Enfin Savart a fait, avec l'orifice de 3^{mm}, une série d'observations correspondantes à quatre charges plus considérables que les précédentes, et le rapport entre la longueur de la partie continue et la racine carrée de la charge s'est encore montré sensiblement constant; la première de ces nouvelles charges était de 51 et la dernière de 459 centimètres.

§ 442. Ainsi qu'on le sait d'après le travail de Savart, la veine fait entendre un son soutenu, résultant principalement du choc périodique des masses isolées dont se compose la partie discontinue contre le corps sur lequel elles tombent, et l'on peut faire acquérir à ce son une grande intensité, en recevant la partie discontinue sur une membrane tendue. En comparant les sons ainsi produits par des veines d'eau sous différentes charges et avec des orifices de différents diamètres, Savart a trouvé que, pour un même orifice, le nombre de vibrations exécuté dans un temps donné est proportionnel à la racine carrée de la charge; et que, pour une même charge, ce nombre est en raison inverse du diamètre de l'orifice. Or nous allons voir ces deux lois dériver encore de nos principes.

Recourons de nouveau à la considération des veines imaginaires. Dans une semblable veine, la longueur des divisions est égale, comme nous l'avons vu, à la longueur normale de celles d'un cylindre de même liquide, formé dans les conditions de nos lois, et ayant pour diamètre celui de la section contractée de la veine; ainsi, cette longueur ne dépend que du diamètre de l'orifice et de la nature du liquide, et ne varie pas avec la vitesse d'écoulement. Or de là résulte que, pour un même liquide et un même orifice, le nombre des divisions qui passent, dans un temps donné, à la section contractée, est proportionnel à cette vitesse, c'est-à-dire à $\sqrt{2gh}$, et par suite, à $\sqrt{h}$. Mais chacune de ces divisions fournit plus bas une masse isolée, et chacune de celles-ci vient ensuite choquer la membrane; donc le nombre des chocs produits dans un temps donné est égal à celui des divisions qui passent, dans ce même temps, à la section contractée, et, par conséquent, est proportionnel à la racine carrée de la charge. Maintenant, il est aisé de voir que chacun des chocs fait naître deux vibrations : car le petit enfoncement qu'il détermine dans la membrane est suivi d'un petit relèvement, ce qui donne deux ondes; donc le nombre de vibrations correspondant au son produit est double de celui des chocs, et, par conséquent, est également proportionnel à la racine carrée de la charge.

En second lieu, puisque la longueur normale des divisions d'un cylindre supposé dans les conditions de nos lois et formé d'un liquide donné est proportionnelle au diamètre de ce cylindre, il s'ensuit que, pour un même liquide, la longueur des divisions de la veine imaginaire est proportionnelle au diamètre de la section contractée, et, par suite, sensiblement proportionnelle à celui de l'orifice. Or, pour une vitesse d'écoulement déterminée, le nombre des divisions qui passent, dans un temps donné, à la section contractée, est évidemment en raison inverse de la longueur de ces divisions; donc, si le liquide demeure le même, ce nombre est sensiblement en raison inverse du diamètre de l'orifice. Mais, d'après ce que nous avons vu ci-dessus, le nombre de vibrations correspondant au son produit est double du précédent; donc, lorsque la charge et la nature du liquide ne changent pas, ce nombre de vibrations est, de même, sensiblement en raison inverse du diamètre de l'orifice.

Ainsi, les deux lois qui, d'après Savart, régissent les sons rendus par les veines, seraient nécessairement satisfaites à l'égard de nos veines imaginaires.

Passons aux veines réelles. Pour un orifice déterminé, à mesure qu'on augmente la charge, la constitution de la veine approche de plus en plus de ce qu'elle serait s'il n'y avait point d'accélération, et conséquemment la longueur de ses divisions naissantes converge vers celle qu'elles prendraient dans le même cas; d'où il suit, en vertu de ce qui précède, qu'à partir d'une moindre charge suffisamment forte, les lois de Savart seront nécessairement satisfaites.

§ 443. Les expériences d'où Savart a déduit la proportionnalité, pour un même orifice, entre le nombre de vibrations et la racine carrée de la charge, vont nous permettre de vérifier un résultat que nous avons simplement présenté comme probable (§ 373), savoir que, dans la transformation d'un cylindre liquide libre sur toute sa surface convexe et d'une longueur telle que les divisions puissent prendre leur longueur normale, le rapport entre cette longueur normale et le diamètre du cylindre serait, dans les différents liquides, peu éloigné de 4.

Voici d'abord le tableau des résultats obtenus par Savart; les charges sont encore exprimées en centimètres.

DIAMÈTRE DE L'ORIFICE, 3^{mm}.	
CHARGES.	NOMBRES de VIBRATIONS PAR SECONDE.
51	600
102	853
153	1024
459	1843

Considérons maintenant une division immédiatement après son passage à la section contractée, c'est-à-dire à l'instant où son extrémité supérieure franchit cette section; c'est ce que nous nommons une division naissante. On admettra sans peine qu'avec l'orifice de 3^{mm} employé par Savart, et même sous la moindre des charges ci-dessus, charge qui est déjà forte, la veine, abstraction faite de ses divisions, s'écartait extrêmement peu de la forme cylindrique, et qu'en outre, dans la petite longueur correspondante à une division naissante, l'accélération du mouvement de translation pouvait être regardée comme négligeable; conséquemment, sous cette moindre charge, et, à plus forte raison, sous les charges suivantes, les divisions naissantes devaient prendre à très-peu près la longueur normale de celles d'un cylindre d'eau libre sur toute sa surface convexe.

Cela posé, si λ désigne la longueur d'une division naissante, t le temps qu'a employé son cercle de gorge inférieur à parcourir cette longueur depuis la section contractée, et h la charge, on aura sensiblement :

$$\lambda = t\sqrt{2gh}.$$

Soit, en outre, n le nombre de divisions qui passent en une seconde à la section contractée ; le temps t mesurant évidemment la durée du passage de l'une d'elles, on aura, en prenant la seconde pour unité de temps, $t = \frac{1}{n}$, et, par suite,

$$\lambda = \frac{1}{n}\sqrt{2gh}.$$

Soit enfin k le diamètre de la section contractée correspondante au même orifice; on aura, pour représenter le rapport entre la longueur des divisions naissantes et ce diamètre, la formule

$$\frac{\lambda}{k} = \frac{1}{kn}\sqrt{2gh} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [a].$$

Il est inutile de faire remarquer que les valeurs de h, k et g devront être rapportées à une même unité de longueur. En prenant pour cette unité le centimètre, la valeur de h sera donnée immédiatement par le tableau ci-dessus, et il faudra faire $g = 980{,}9$; quant à k, on peut conclure des résultats rappelés dans la note du § 436, que lorsque le diamètre de l'orifice est de 3^{mm}, celui de la section contractée en est à bien peu près exactement les 0,8; par conséquent, si nous conservons le centimètre comme unité de longueur, ce qui donnera 0,3 pour la valeur du diamètre de l'orifice dont il s'agit, nous aurons $k = 0{,}24$.

Substituant dans la formule [a] ces valeurs de k et de g, ainsi que celles de h tirées du tableau et celles de n obtenues en prenant (§ précéd.) les moitiés respectives des nombres de vibrations contenus dans le même tableau, nous trouverons, pour le rapport $\frac{\lambda}{k}$, les quatre nombres suivants :

4,39
4,37
4,46
4,29,

et l'on voit qu'en effet, ces nombres sont très-rapprochés les uns des autres, et s'éloignent peu de 4.

La moyenne de ces mêmes nombres, savoir 4,38, ou plus simplement 4,4, nous donne donc, avec une grande approximation, le rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre, dans la transformation d'un long cylindre d'eau supposé sans pesanteur et libre sur toute sa surface convexe.

En déterminant par l'expérience, pour un autre liquide quelconque, le nombre de vibrations correspondant à un orifice donné et à une charge suffisante également donnée, on obtiendra de même, à l'aide de la formule [a], la valeur de $\frac{\lambda}{k}$ relative à ce liquide ; or Savart dit que la nature du liquide paraît être sans influence sur le nombre de vibrations correspondant à une charge et à un orifice donnés, et l'on peut en conclure que la valeur de $\frac{\lambda}{k}$ serait sensiblement la même, en général, à l'égard des différents liquides. Par conséquent, dans de longs cylindres respectivement formés de ces liquides, supposés sans pesanteur et libres sur toute leur surface convexe, le rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre serait aussi sensiblement le même, et s'éloignerait peu de 4, comme nous l'avons avancé.

Cependant Savart n'indique pas quels sont les liquides qu'il a comparés, et l'on doit présumer que si l'on soumettait à l'expérience un liquide à forte viscosité intérieure, tel que la glycérine, ou à très-forte viscosité superficielle, tel qu'une solution de saponine, on obtiendrait des rapports un peu plus grands.

§ 444. La durée partielle de la transformation d'un cylindre pouvant évidemment, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, être comptée en ne considérant que l'un des étranglements de la figure, ou même simplement le cercle de gorge de celui-ci, et, d'autre part, cette durée variant, pour un même diamètre, avec la nature du liquide, il s'ensuit que, dans la veine, le temps compris entre l'instant où la section superficielle qui doit constituer le cercle de gorge d'un étranglement passe à la section contractée et l'instant de la rupture du filet dans lequel cet étranglement se convertit, variera aussi, toutes choses égales d'ailleurs, avec la nature du liquide. Or de là résulte nécessairement que, pour une même charge et un même orifice, la longueur de la partie continue de la veine changera d'un liquide à un autre; et cette conclusion est encore conforme aux résultats de l'expérience. En effet, Savart a mesuré la partie continue de quatre veines s'écoulant dans des circonstances identiques, et formées respectivement d'éther sulfurique, d'alcool, d'eau, et d'une solution d'ammoniaque caustique, et il a trouvé les longueurs suivantes :

Éther.	90,
Alcool	85,
Eau	70,
Ammoniaque	46.

§ 445. Nous ne nous sommes occupé jusqu'ici que des veines lancées verticalement de haut en bas. Les veines lancées dans des directions différentes de la verticale sont incurvées par l'action de la pesanteur, et, par conséquent, ne peuvent plus être comparées à des cylindres; mais elles constituent des figures allongées suivant une de leurs dimensions, et dès lors il doit également (§ 368) s'y former des divisions passant graduellement à l'état de sphères isolées; ainsi la constitution des veines lancées soit horizontalement, soit obliquement, doit être analogue à celle des veines lancées verticalement de haut en bas, conclusion qui s'accorde, en effet, avec les observations de Savart.

On doit croire que cette analogie de constitution s'étend à la partie ascendante des veines lancées verticalement de bas en haut; seulement, dans le cas de ces dernières veines, les phénomènes sont probablement troublés par le liquide qui retombe.

§ 446. En exposant (§ 239) les phénomènes qui se manifestent lorsqu'un liquide s'écoule par une fente rectiligne verticale et étroite percée dans la paroi latérale du réservoir depuis le fond de celui-ci jusqu'au-dessus du niveau du liquide, et en décrivant le bourrelet qui garnit le bord supérieur de la lame ainsi engendrée, j'ai dit que, dans les meilleures conditions de l'expérience, c'est-à-dire avec une fente de 2^{mm} de largeur, ce bourrelet, à partir du milieu environ de sa longueur, se change, à droite et à gauche, en gerbes de gouttelettes. Or mon fils, en observant, à travers le disque percé de fentes radiales et tournant avec une vitesse convenable, la portion de ce même bourrelet antérieure au lieu où s'opérait la résolution en gouttes, l'a vue comme consistant en un faisceau de veines de petit diamètre, dont chacune présente une suite de renflements et d'étranglements, et qui ont un léger mouvement d'oscillation dans le sens transversal. On comprend, d'après cela, la génération des gouttes, lesquelles ne sont autre chose que les renflements ci-dessus passés à l'état de masses isolées ; on comprend aussi que le mouvement oscillatoire des veines en question empêche qu'on ne distingue nettement celles-ci à l'œil nu. Quant à la cause de cette bizarre constitution en faisceau de veines, elle m'échappe complétement.

Remarquons, en passant, que les bourrelets rappelés au § 427 peuvent être considérés comme constituant aussi des veines dans lesquelles la transformation en masses isolées s'effectue progressivement pendant le mouvement de translation du liquide.

§ 447. L'influence qu'exercent sur la veine les mouvements vibratoires communiqués au vase, influence que nous mettrons bientôt en rapport avec notre théorie, a conduit Savart à regarder la constitution de la veine comme étant elle-même le résultat de certains mouvements vibratoires inhérents au phénomène de l'écoulement. Partant de là, Savart a essayé de faire comprendre comment le genre d'ébranlement occasionné dans la masse du liquide par l'émission de celui-ci, pourrait effectivement donner naissance à des vibrations dirigées normalement au plan de l'orifice ; voici en quels termes il s'exprime à ce sujet :

« On conçoit, en effet, qu'à l'instant où l'orifice est ouvert, la colonne de liquide qui est immédiatement placée au-dessus de lui, étant la première à s'écouler, le niveau de la partie centrale du liquide doit tendre à s'abaisser un peu, et qu'au contraire la partie la plus extérieure de la masse du fluide se trouvant refoulée, son niveau doit s'élever d'une petite quantité, et que, par conséquent, toute la masse doit devenir le siége d'oscillations analogues à celles qui ont lieu sous la seule influence de la pesanteur dans un siphon dont les branches sont redressées. »

Savart a montré que ces oscillations, qui produiraient des *pulsations* à l'orifice, entraîneraient la formation alternative de renflements et d'étranglements dans la veine, parce que la portion de cette dernière qui sortirait pendant la durée d'une pulsation dirigée de dedans en dehors éprouverait une compression qui en augmenterait l'épaisseur, tandis que la portion qui sortirait pendant la durée d'une pulsation dirigée de dehors en dedans, éprouverait, au contraire, une traction qui l'amincirait.

On a vu, d'après l'exposé de notre théorie, que la constitution de la veine est une conséquence nécessaire des propriétés des cylindres liquides, propriétés que nous avons étudiées par l'expérience et par le calcul; nous pouvons donc, je crois, nous dispenser d'une discussion détaillée à l'égard des idées ingénieuses que nous venons de rappeler, idées pour l'intelligence complète desquelles nous renvoyons au Mémoire même de Savart. Nous ferons seulement remarquer qu'il est difficile d'admettre le genre d'ébranlement supposé par Savart; que, d'ailleurs, on ne voit pas bien comment les pulsations dont il s'agit, après avoir dessiné sur la surface de la veine une division naissante, détermineraient le développement ultérieur de celle-ci, de manière à la faire passer graduellement, pendant sa descente, à l'état de masse isolée; qu'enfin, si l'on voulait faire abstraction de ces difficultés, il faudrait encore recourir à des hypothèses additionnelles pour arriver aux lois qui régissent la longueur de la partie continue et à celles que suivent les nombres de vibrations correspondants aux sons produits par le choc de la partie trouble.

Du reste, c'est en empruntant à Savart l'une de ses idées, qui devient applicable lorsque, par une cause extérieure, des vibrations sont en réalité excitées dans le liquide, que nous trouverons les éléments nécessaires pour expliquer la curieuse influence de ces vibrations sur la veine.

§ 448. Occupons-nous donc de ce sujet; et d'abord rappelons, en résumé, quelles sont, d'après les recherches de Savart, les modifications que reçoit la veine dans les circonstances en question, c'est-à-dire lorsqu'elle est sous l'influence des mouvements vibratoires. Dans les quatorze premiers Nos qui suivent, il s'agit des veines verticalement descendantes.

1° La partie continue se raccourcit.

2° L'épaisseur de la portion limpide paraît augmentée.

3° Chacune des masses qui s'isolent à l'extrémité inférieure de la partie continue se trouve d'abord aplatie dans le sens vertical, et, par suite, son diamètre horizontal est plus grand que celui de la sphère qu'elle tend à constituer.

4° Les masses étant ainsi abandonnées à elles-mêmes sous une forme aplatie et tendant à prendre la forme sphérique, elles dépassent ensuite cette dernière par l'effet de l'inertie, et s'allongent dans le sens vertical, pour s'aplatir de nouveau, puis s'allonger encore, et ainsi de suite; de sorte que leur diamètre horizontal, qui d'abord est supérieur à celui de la sphère de même volume, devient ensuite moindre que ce dernier, puis de nouveau plus grand, etc.

Ces variations périodiques du diamètre horizontal des masses ayant lieu pendant que celles-ci sont emportées par leur mouvement de translation, l'impression laissée dans l'œil par le passage rapide de l'une quelconque de ces masses doit être celle d'une figure offrant une suite régulièrement disposée de maxima et de minima d'épaisseur, les premiers correspondant aux lieux par lesquels a passé la masse dans ses instants de plus grand développement horizontal, et les seconds aux lieux par lesquels elle a passé dans ses instants de plus grande contraction horizontale; et comme les masses successives passent soit exactement, soit à peu près, par les mêmes lieux dans les mêmes phases de leurs oscillations de forme, les impressions qu'elles produisent individuellement se superposent plus ou moins complétement, et la partie trouble de la veine présente d'une manière permanente les différences d'épaisseur dont il s'agit; en d'autres termes, cette partie trouble se montre composée d'une suite régulière de ventres allongés et de nœuds occupant des positions fixes.

Quand la superposition ci-dessus est imparfaite, chaque ventre offre l'apparence d'un assemblage de lames, dont chacune constitue une espèce de cône ayant pour axe celui de la veine. La moitié environ du premier ventre est formée par le passage des renflements du bas de la partie continue, de sorte que cette partie continue se termine vers le milieu de la longueur de ce même ventre.

5° La longueur et le diamètre des ventres sont d'autant plus considérables que la charge est plus forte et que le diamètre de l'orifice est plus grand. Il en est de même du diamètre des nœuds.

6° L'ensemble de ces phénomènes se manifeste déjà lorsque la veine est abandonnée à elle-même dans les circonstances ordinaires, c'est-à-dire lorsqu'on n'excite point à dessein de mouvements vibratoires dans le liquide. Cela provient, d'une part, de ce que le choc de la partie discontinue contre le liquide dans lequel elle tombe, fait naître des vibrations qui se transmettent au vase par l'intermédiaire de l'air et des supports, et, d'autre part, de ce que le vase reçoit aussi, par les supports, les petites vibrations dues aux bruits extérieurs et propagées dans le sol. Ce n'est qu'en soustrayant, par certains procédés, le vase à ces deux influences, que la veine prend l'aspect qui lui est propre.

7° Mais tous les phénomènes indiqués dans les cinq premiers numéros précédents deviennent beaucoup plus prononcés et plus réguliers, lorsque, à l'aide d'un instrument, on produit, dans le voisinage de l'appareil, un son à l'unisson de celui qui résulterait du choc de la partie discontinue de la veine contre une membrane tendue. Alors la partie continue se raccourcit considérablement ; le diamètre de la portion limpide se montre encore augmenté ; les ventres s'élargissent en se ramassant davantage sur eux-mêmes, de sorte que les nœuds qui les séparent sont plus allongés ; enfin ces nœuds paraissent d'un moindre diamètre.

8° Outre l'unisson ci-dessus, d'autres sons, produits de même par un instrument dans le voisinage de l'appareil, agissent sur la veine d'une manière analogue, mais avec beaucoup moins d'énergie.

Enfin il est des sons qui n'exercent aucune influence.

9° Dans le cas particulier où le son de l'instrument s'éloigne fort peu de l'unisson, la partie continue de la veine s'allonge et se raccourcit alternativement, et l'oreille perçoit des battements qui coïncident avec ces variations de longueur.

10° Quand on reçoit la partie discontinue de la veine sur un corps qui ne peut rendre qu'un son déterminé, il arrive fréquemment que les vibrations de ce corps modifient le son propre à la veine ; mais cela ne paraît possible que si l'écart entre ce dernier son et celui qui convient au corps choqué n'excède pas une tierce mineure.

Lorsque le son de la veine est ainsi modifié par un son étranger, il suffit souvent, pour le faire revenir au ton qui lui appartient, d'un léger choc imprimé à l'appareil ou d'un changement de position du corps choqué, et c'est toujours par sauts brusques que ce retour s'opère.

Quand l'écart entre les deux sons est très-petit, ils peuvent se faire entendre périodiquement, ou même simultanément.

11° Les modifications que subit la veine sous l'influence des mouvements vibratoires augmentent encore, et acquièrent une régularité parfaite, lorsque l'instrument sonore (n° 7), au lieu d'être tenu à une certaine distance de l'appareil, est mis en contact avec les parois du vase, et qu'il rend un son très-intense et bien exactement à l'unisson de celui qui est propre à la veine. Alors la partie continue se raccourcit tellement, que l'extrémité supérieure du premier ventre touche presque à l'orifice, et, d'autre part, la superposition des ventres formés par les masses individuelles (n° 4) est exacte, de sorte qu'on n'aperçoit plus aucune apparence de lames.

12° Cette extrême régularité permet de distinguer nettement la figure apparente que produit de son côté le passage des sphérules interposées entre les masses, figure qui occupe l'axe de la veine depuis l'extrémité de la partie continue ; on y remarque aussi des ventres et des nœuds, mais plus courts que ceux qui sont dus au passage des masses.

13° Au moyen d'un instrument ainsi mis en contact avec les parois du vase, presque tous les sons peuvent déterminer des effets analogues à ceux de l'unisson du ton propre à la veine ; mais ces effets sont d'autant moins prononcés que le son de l'instrument s'éloigne davantage de l'unisson dont il s'agit.

14° En outre, dans cette même condition, lorsque le son qui est naturel à la veine n'est pas à l'unisson de celui de l'instrument, il peut y être amené, même quand l'écart entre les nombres de vibrations serait assez grand pour constituer un intervalle de quinte en dessus du son propre à la veine, et de plus d'une octave en dessous.

15° Si la veine, au lieu de s'écouler verticalement de haut en bas, est lancée horizontalement, et qu'elle se trouve dans les circonstances ordinaires, ou, en d'autres termes, qu'elle ne soit point sous l'influence d'un instrument sonore, mais qu'elle aille frapper le liquide du vase qui la reçoit, sa partie trouble présente des ventres et des nœuds, comme en offre, dans les mêmes circonstances, celle des veines verticales descendantes (n° 6), et les vibrations d'un instrument la modifient aussi de la même manière.

Si la veine est lancée obliquement de bas en haut, les mêmes phénomènes s'observent encore, tant que l'angle qu'elle forme avec l'horizon n'excède pas 20° à 25°.

16° Mais au delà de ce terme, et jusqu'à 45° à 50°, la partie discontinue prend d'autres aspects : quand la veine n'est point sous l'influence du son d'un instrument, cette partie discontinue se montre éparpillée dans un même plan vertical en une sorte de gerbe. Sous l'action de vibrations d'une période déterminée, il peut arriver que la gerbe se résolve en deux jets bien distincts, ayant chacun leurs ventres et leurs nœuds régulièrement formés; il peut même se faire que, pour un autre son déterminé, la gerbe se trouve remplacée par trois jets;

enfin il y a toujours un son qui réduit la veine entière à un seul jet présentant un système de ventres et de nœuds parfaitement réguliers, et ce son est aussi celui qui produit le plus grand raccourcissement de la partie continue.

17° Pour une même charge et un même orifice, le nombre de vibrations correspondant au son qui exerce le maximum d'effet sur la longueur de la partie continue et sur les dimensions des ventres de la veine, est d'autant moindre que la direction suivant laquelle cette dernière est lancée fait un angle plus grand avec la verticale descendante menée à partir de l'orifice. La différence entre les nombres de vibrations qui conviennent au cas où le jet tombe verticalement et à celui où il est lancé horizontalement, est peu considérable; mais elle devient très-grande entre ce dernier cas et celui où le jet est vertical ascendant.

§ 449. Cherchons actuellement la raison de ces phénomènes bizarres. Tout ce que nous dirons, d'ici au § 468, se rapportera aux veines lancées suivant la verticale descendante; il faudra donc, jusque-là, se représenter toujours de semblables veines.

On peut admettre, nous le savons (§§ 405 et 423), qu'à l'origine, tout au moins, de la transformation d'un cylindre liquide, la longueur d'un étranglement est égale à celle d'un renflement; or ce résultat est évidemment applicable aux étranglements et aux renflements naissants de la veine, et il s'ensuit que les durées respectives des passages d'un de ces étranglements et d'un de ces renflements à la section contractée sont égales; d'un autre côté, une division d'un cylindre ou d'une veine étant comprise entre les milieux de deux étranglements voisins, et se composant ainsi d'un renflement et de deux demi-étranglements, la durée du passage d'une division de la veine à la section contractée équivaut nécessairement à la somme de celles des passages d'un renflement et d'un étranglement ; et puisque ces deux dernières sont égales, nous arrivons à cette première conséquence, que la durée du passage soit d'un étranglement, soit d'un renflement, à la section contractée, est égale à la moitié de celle du passage d'une division.

Mais le nombre de vibrations par seconde correspondant au son que rend le choc de la partie discontinue de la veine contre une membrane tendue est, comme nous le savons (§ 442), double de celui des masses isolées qui viennent, dans le même intervalle de temps, heurter cette membrane, et ce dernier nombre est (ibid.) toujours égal à celui des divisions qui passent, dans le même temps aussi, à la section contractée ; donc la durée de chacune des vibrations dont il s'agit est, comme la durée du passage d'un étranglement ou d'un renflement, égale à la moitié de celle du passage d'une division, et nous en déduirons enfin cette conclusion fondamentale :

La durée de chacune des vibrations correspondantes au son propre à la veine est égale à celle du passage d'un étranglement ou d'un renflement à la section contractée.

§ 450. Maintenant supposons qu'à l'aide des moyens indiqués par Savart, on ait soustrait la veine à l'influence des vibrations provenant de la chute du liquide dans le vase qui le reçoit, et à celle des bruits extérieurs ; puis que, la veine étant ainsi abandonnée à la seule action des forces figuratrices, on transmette au vase d'où elle s'échappe un son exactement à l'unisson de celui que rendrait le choc de la partie discontinue contre une membrane. Le liquide qui afflue de l'intérieur du vase vers l'orifice, traverse celui-ci en accomplissant ses vibrations; si donc ces dernières sont dirigées dans le sens vertical, chaque portion de la veine qui passera à la section contractée en exécutant une vibration descendante, sera animée de la vitesse $\sqrt{2gh}$ augmentée de toute celle de cette vibration, et conséquemment elle contiendra plus de liquide que la portion qui aurait passé dans le même temps en l'absence des vibrations. L'excès de vitesse tendra, à la vérité, à se communiquer à la partie de la veine située au-dessous de celle que nous considérons; mais, en faisant pour un moment abstraction des forces figuratrices, nous devrons admettre du moins que cette partie inférieure opposera une certaine résistance en vertu de son inertie, et que, par suite, l'excès de liquide amené par l'excès de vitesse tendra à se répartir dans le sens horizontal, ou, en d'autres termes, à renfler la portion à laquelle il appartient.

Cela posé, si la figure à peu près cylindrique que prendrait la veine par les seuls effets du mouvement de translation du liquide et de la forme circulaire de l'orifice était une figure d'équilibre stable, la portion qui, par l'action de la vibration descendante, se renfle pendant qu'elle passe à la section contractée, exercerait en même temps un effort pour revenir à sa forme première; d'où il suit nécessairement que, dans l'hypothèse dont il s'agit, à mesure que le renflement se forme, il se propagerait aux tranches sous-jacentes, et constituerait sur la surface de la veine une onde renflée d'une certaine longueur, laquelle marcherait avec une vitesse qui serait la somme de celle de sa propagation et de celle du liquide. Alors aussi la portion de la veine qui passerait ensuite à la section contractée en exécutant une vibration ascendante, et qui, par conséquent, franchirait cette section avec la vitesse $\sqrt{2gh}$ diminuée de celle de la vibration, produirait, par les raisons contraires, une onde étranglée de même longueur que l'onde renflée, et qui marcherait derrière celle-ci avec la même vitesse; puis viendrait une nouvelle onde renflée suivie d'une nouvelle onde étranglée, et ainsi de suite, tant que durerait la communication des mouvements vibratoires.

Mais, en vertu de l'instabilité de la figure cylindrique et de la tendance de la veine à la transformation en sphères isolées, les choses se passeront d'une tout autre manière. Imaginons que l'extrémité inférieure de l'un des renflements qui se formeraient par l'action seule des forces figuratrices dues à l'instabilité, franchisse la section contractée au moment précis où commence dans le liquide une vibration descendante. Alors, puisque les forces figuratrices poussent d'une manière continue dans cette portion de la veine un excès de liquide qui la renfle sans qu'elle ait aucune tendance à revenir sur elle-même, on voit que la quantité de liquide amenée en même temps par la vitesse additionnelle due à la vibration descendante pourra se répartir dans le sens horizontal, et contribuer à la formation du renflement, sans avoir à surmonter une tendance contraire. En outre, puisque la durée de la vibration est égale au temps qu'emploie à passer à la section contractée la portion de la veine dont les forces figuratrices feraient à elles seules un renflement naissant, l'extrémité supérieure de cette portion franchira la section contractée au moment précis où la vibration finira, de sorte que l'action immédiate de celle-ci se sera exercée sur toute la portion dont il s'agit, et seulement sur cette portion. Enfin, puisque le renflement produit par les actions combinées dont nous venons de parler n'a aucune tendance à s'effacer, il ne se propagera point aux parties sous-jacentes, et, par conséquent, il ne donnera point lieu à une onde. Ainsi la portion considérée de la veine sera plus renflée, dès sa formation, qu'elle ne l'eût été en l'absence des mouvements vibratoires; mais elle aura la même longueur et descendra avec la même vitesse que dans ce dernier cas.

Après la vibration descendante viendra une vibration ascendante, et celle-ci diminuant la vitesse du passage à la section contractée, il en résultera, comme nous l'avons déjà dit, dans la portion de la veine qui passe sous son influence, une diminution de volume, de sorte que cette portion tendra à s'amincir; mais les forces figuratrices tendant à faire de cette même portion un étranglement naissant, l'amincissement dû à la vibration s'effectuera aussi sans rencontrer de tendance opposée, et, par conséquent, sans donner lieu à la formation d'une onde. On voit donc que, de même que le renflement qui le précède, l'étranglement ainsi formé par la double action des forces figuratrices et de la vibration sera plus prononcé, mais aura la même longueur, et descendra avec la même vitesse, que si la veine était abandonnée à la seule action des forces figuratrices.

Enfin la même chose aura lieu à l'égard de tous les autres renflements et étranglements: en vertu de l'égalité entre le temps qu'emploie chacune de ces portions de la veine à passer à la section contractée et la durée de chaque vibration, tous les renflements coïncideront avec les vibrations descendantes, et tous les étranglements avec les vibrations ascendantes; les uns et les autres conserveront conséquemment leur longueur et leur vitesse de translation, mais tous quitteront la section contractée plus prononcés, ou, en d'autres termes, dans une phase plus avancée de la tranformation, que si l'on n'eût point produit les mouvements vibratoires.

§ 451. Mais l'action de ces mouvements ne se bornera point là : en effet, les vitesses des vibrations descendantes et ascendantes, vitesses qui, ainsi que nous l'avons fait voir, changent de directions dans les renflements et étranglements pour produire un plus grand développement transversal des premiers et un plus grand amincissement des seconds, ne peuvent s'anéantir, dans chacune de ces portions, au moment où elle a achevé son passage à la section contractée ; ces vitesses ainsi changées en vitesses transversales continueront donc, comme vitesses acquises, à s'ajouter à celles qui résultent des forces figuratrices.

§ 452. Pour que des vibrations transmises exercent avec toute leur intensité sur les divisions naissantes de la veine l'action décrite dans les deux paragraphes précédents, il faut qu'à l'orifice elles soient, comme nous l'avons imaginé, dirigées dans le sens vertical. Il serait sans doute difficile de faire voir à priori qu'en se propageant jusqu'à l'orifice, les vibrations y prennent réellement cette direction; mais Savart, qui s'est tant occupé de la communication des mouvements vibratoires, admet le fait implicitement : en effet, d'une part, il suppose que ces vibrations ne font que renforcer celles qui naissent, selon lui, de l'écoulement même et qui seraient nécessairement verticales, et, d'autre part, il ne dit point que, pour obtenir le maximum d'action, il faille donner à l'instrument sonore une position particulière. Du reste, si l'on trouvait là quelque difficulté, il suffirait de remarquer que, quelle que soit la direction réelle suivant laquelle les molécules liquides exécutent, en franchissant l'orifice, les vibrations qui leur sont transmises, on pourra toujours, sauf dans le cas tout exceptionnel où cette direction serait exactement horizontale, décomposer chaque vibration en deux autres, dont l'une horizontale n'influera point sur la transformation des divisions de la veine, et dont l'autre verticale exercera toute son action. D'ailleurs, comme nous le verrons (§ 487), Magnus a montré que l'effet exercé sur la veine par les vibrations transmises dépend surtout de celles qu'exécute le fond du vase, et ces dernières sont naturellement verticales.

Nous avons supposé, en outre, que le moment où commence chaque vibration descendante soit aussi celui où passe à la section contractée l'extrémité inférieure de chaque renflement; mais si, dans les premiers instants où les vibrations se font sentir, cette coïncidence n'a pas lieu, il y aura lutte entre les actions des forces figuratrices et celles des vibrations, et l'on comprend que dès lors la transformation de la veine, qui, n'étant qu'un phénomène d'instabilité, peut se déplacer par des causes légères, fera reculer ou avancer l'ensemble des renflements et des étranglements, de manière à établir bientôt la coïncidence ci-dessus et à permettre ainsi le concours et la pleine liberté des deux systèmes d'actions.

§ 453. Ces principes établis, nous allons en voir sortir une à une les modifications qu'éprouve la veine par l'influence des vibrations.

Rappelons-nous d'abord que lorsque la veine est abandonnée à la seule action des forces figuratrices, la vitesse avec laquelle s'effectue la transformation demeure fort petite jusqu'à une distance assez considérable de la section contractée, ce qui donne à la portion correspondante de la veine un aspect calme et limpide ; en second lieu, que, plus loin, les renflements prenant un développement notable et plus rapide, la veine paraît s'élargir, jusqu'au point où les masses s'isolent; et enfin qu'au-delà de ce point, le diamètre de la veine, diamètre qui est celui de ces mêmes masses, est sensiblement uniforme (§ 432).

Figurons-nous une semblable veine, et produisons, à proximité de l'appareil, le son considéré dans tout ce qui précède. Sous l'influence de ce son, chaque division quittant la section contractée dans une phase plus avancée de la transformation, et, en outre, la transformation partant de cette phase avec une vitesse plus grande qu'elle ne l'eût fait sous la seule action des forces figuratrices, il en résulte nécessairement que cette même transformation s'achèvera en moins de temps ; conséquemment chaque division atteindra l'état de masse isolée à une distance moindre de l'orifice, et ainsi la partie continue se raccourcira.

Et puisque les renflements sont plus développés dès leur origine, on voit, en second lieu, que l'épaisseur apparente de la portion limpide de la veine, épaisseur qui, en chaque point de la longueur de cette portion limpide, est évidemment celle qu'ont acquise les renflements au moment où ils y passent, se montrera augmentée.

En troisième lieu, l'excès de vitesse transversale que la transformation reçoit des vibrations et qui persiste comme vitesse acquise, doit nécessairement faire dépasser au diamètre horizontal des masses successives celui des sphères que ces masses tendent à constituer, en sorte que ces mêmes masses s'aplatiront dans le sens vertical. Mais on comprend que cette extension horizontale et cet aplatissement vertical rendent la pression capillaire, au pourtour de la masse, supérieure à celle des points voisins de l'axe, et que de là naît une résistance croissante qui finit par détruire la vitesse transversale. Alors les différences de pression agiront librement et la masse reviendra sur elle-même pour atteindre sa figure d'équilibre, c'est-à-dire la figure sphérique; mais le phénomène s'effectuant avec une vitesse accélérée, ne pourra s'arrêter à cette dernière figure, et la masse se contractera dans le sens horizontal en s'allongeant dans le sens vertical, jusquà ce que la résistance croissante qui résulte des nouvelles inégalités entre les pressions ait anéanti la vitesse acquise; puis la masse, sollicitée par les différences de pression qui ont produit cette résistance, reviendra encore vers la figure sphérique, qu'elle dépassera de nouveau pour s'étendre une seconde fois dans le sens horizontal et s'aplatir dans le sens vertical, après quoi elle recommencera la même série de modifications et continuera ces oscillations de forme tant que durera sa chute.

Ainsi s'expliquent très-simplement, pour le cas de l'unisson avec le son que ferait naître le choc de la partie discontinue, les faits rappelés dans les n^{os} 1, 2, 3 et 4 du § 448.

Seulement, puisque l'extrémité de la partie continue de la veine se trouve vers le milieu de la longueur du premier ventre, et conséquemment est peu éloignée du point correspondant au premier des maxima d'épaisseur de la partie trouble, il faut admettre que chaque masse atteint sa première phase de plus grand développement horizontal un peu avant de se détacher complétement, et au moment sans doute où elle ne tient plus à celle qui la suit que par un filet.

Quant aux systèmes de lames dont les ventres offrent l'apparence lorsque les phénomènes ne sont point tout à fait réguliers, c'est évidemment, ainsi que Savart l'a reconnu, le résultat de l'inexacte superposition de plusieurs des ventres individuellement produits par les masses successives : ces ventres se voient alors simultanément et paraissent comme au travers les uns des autres, par l'effet de la persistance de leurs impressions sur la rétine.

§ 454. Il est clair que le temps compris entre deux phases de plus forte contraction horizontale, ou, en d'autres termes, celui qu'emploie chaque masse à exécuter une oscillation complète de forme, est indépendant de la vitesse de translation ; par conséquent le trajet que parcourt une masse pendant le temps dont il s'agit est d'autant plus grand que la vitesse de translation est plus considérable ; mais ce trajet est évidemment la distance qui sépare les milieux de deux nœuds, ou la longueur d'un ventre(1) ; cette longueur doit donc augmenter avec la charge.

Supposons, pour un instant, que la veine ne se divise pas ; alors, sous des charges faibles, elle s'effilera beaucoup, et, même dans la petite longueur qui correspondrait à une division naissante, son diamètre diminuera déjà à partir de la section contractée, d'une quantité appréciable ; de plus, la longueur dont il s'agit se trouvera elle-même diminuée, car, on le comprend, elle doit être intermédiaire entre les longueurs normales des divisions de deux cylindres ayant respectivement pour

(1) C'est ainsi que Savart paraît considérer les ventres toutes les fois qu'il s'occupe de leur longueur, et nous nous sommes conformé à ses expressions ; mais, en réalité, il est visible que l'espace en question se compose d'un ventre et de deux demi-nœuds.

diamètres celui de la section contractée et celui de la section inférieure de la portion que nous considérons. En présence des forces figuratrices, c'est-à-dire dans le cas réel, le volume des divisions naissantes est donc, par la double raison ci-dessus, moindre sous des charges faibles que sous des charges fortes ; mais chaque division naissante fournissant plus bas une masse isolée, le volume de ces masses doit croître de même avec la charge.

Or plus ces masses ont de volume, plus leur diamètre horizontal doit être grand dans ses maxima et minima successifs ; mais ces diamètres maxima et minima sont respectivement les diamètres des ventres et des nœuds ; donc les diamètres des ventres et ceux des nœuds doivent également augmenter avec la charge. Seulement l'augmentation des masses isolées tend vers une limite peu étendue : car le plus grand volume qu'elles puissent acquérir est évidemment celui qu'elles prendraient si le mouvement de translation du liquide était uniforme, c'est-à-dire celui des sphères dans lesquelles se résoudrait un cylindre indéfini formé du même liquide et ayant un diamètre égal à celui de la section contractée.

Du reste, l'air que traverse la veine a sans doute aussi quelque influence : il ne peut être qu'imparfaitement entraîné dans le mouvement du liquide, et oppose ainsi une certaine résistance qui croît nécessairement avec la vitesse de translation, et, par suite, avec la charge ; or cette résistance doit augmenter le maximum d'aplatissement des masses isolées, et entraver plus ou moins leur allongement subséquent ; elle doit donc contribuer à faire croître les diamètres des ventres et des nœuds quand on augmente la charge.

Maintenant, si la charge ne varie pas, mais que l'on emploie un orifice plus grand, le volume des divisions de la veine, et, par suite, celui des masses isolées, sera aussi plus considérable; or plus ces masses sont grosses, moins leurs oscillations de forme doivent être rapides, et conséquemment plus elles doivent parcourir d'espace, dans leur descente, pendant une de ces oscillations; ainsi la longueur des ventres doit croître avec le diamètre de l'orifice. Quant aux diamètres respectifs des ventres et des nœuds, il est évident, d'après ce que nous avons fait remarquer plus haut, qu'ils croîtront en même temps.

On voit donc, par le contenu de ce paragraphe, que les faits du n° 5 du § 448 sont encore des conséquences nécessaires de la théorie, toujours dans le cas de vibrations de même période que celles du son propre à la veine. Passons aux faits des n^{os} 6 et 7.

§ 455. Lorsque la veine n'est point sous l'influence d'un instrument sonore, mais qu'elle est reçue dans un vase simplement posé sur le sol, la principale cause des mouvements vibratoires transmis par l'air et les supports au vase d'où elle s'échappe est le choc des masses isolées contre le liquide dans lequel elles tombent; on comprend donc que, dans ces mouvements, doivent dominer des vibrations de même période que celles qui résulteraient du choc des masses dont il s'agit contre une membrane tendue, et conséquemment l'action exercée sur la veine s'explique par ce que nous avons exposé dans les paragraphes qui précèdent. Seulement les vibrations ainsi produites n'ayant pas une grande intensité, les modifications de la veine ne pourront acquérir tout le développement dont elles sont susceptibles; en outre, ces mêmes vibrations étant peu régulières et se trouvant accompagnées des petites vibrations plus irrégulières encore qui proviennent des bruits extérieurs, les phénomènes doivent se ressentir de ces irrégularités, et c'est en effet dans ces circonstances que Savart décrit l'apparence de lames dans l'intérieur des ventres.

Savart a mesuré approximativement, dans ces mêmes circonstances, sur des veines d'eau lancées par deux orifices différents et sous des charges différentes, les longueurs et les diamètres des ventres ainsi que les diamètres des nœuds. Nous ne croyons pas inutile de reproduire ici les résultats de ces mesures; ils sont exprimés en prenant le centimètre pour unité :

Orifice de 6 millimètres de diamètre.

CHARGES.	LONGUEURS de la PARTIE CONTINUE.	LONGUEURS des VENTRES.	DIAMÈTRES des VENTRES.	DIAMÈTRES des NŒUDS.
4,5	40	25	0,9	0,70
12	59	30	1,0	0,75
27	82	39	1,1	0,80
47	112	60	1,2	0,90

Orifice de 3 millimètres de diamètre.

CHARGES.	LONGUEURS de la PARTIE CONTINUE.	LONGUEURS des VENTRES.	DIAMÈTRES des VENTRES.	DIAMÈTRES DES NŒUDS.
4,5	16	7,8	0,50	0,28
12	25	9	0,52	0,32
27	41	13	0,55	0,36
47	55	16	0,60	0,40

Nous ferons remarquer ici que la longueur d'un ventre étant l'espace parcouru par une masse pendant la durée d'une oscillation de forme, et cette durée étant constante dans une même veine, les ventres appartenant à celle-ci doivent augmenter en longueur à partir du premier, à cause de l'accélération de la descente. Il est donc singulier que Savart, qui, en un autre endroit de son Mémoire, parle de cette augmentation à propos d'une expérience particulière, ait donné, dans les tableaux ci-dessus, les longueurs dont il s'agit comme absolues; on doit présumer qu'elles se rapportent au premier ventre de chaque veine. A la vérité, l'expérience particulière dans laquelle Savart a observé l'augmentation de longueur des ventres devait rendre l'effet plus apparent, parce que le premier ventre naissait très-près de l'orifice.

§ 456. Si, la veine tombant de même librement dans le liquide du vase qui la reçoit, on fait résonner à proximité de l'appareil un instrument qui rende l'unisson, comme nous l'avons supposé jusqu'ici, alors, sous l'action de ces vibrations plus intenses et parfaitement régulières, les modifications de la veine seront nécessairement plus prononcées : c'est-à-dire que la portion limpide paraîtra encore un peu plus épaisse, que la partie continue subira un nouveau raccourcissement, que les ventres s'élargiront et que les nœuds s'aminciront. En outre, les ventres formés individuellement par chacune des masses se superposeront d'une manière plus exacte, et ainsi se dépasseront moins les uns les autres vers leurs extrémités, en sorte que les ventres qui résultent de leur ensemble seront plus ramassés sur eux-mêmes, et que les nœuds qui séparent ces derniers sembleront s'être allongés. Or tel est en réalité, comme on le voit par le n° 7 du § 448, l'état de la veine sous l'influence dont il s'agit.

Les phénomènes seraient beaucoup plus réguliers encore si la veine était primitivement soustraite à toute influence étrangère; et, en effet, Savart parle de la grande régularité des ventres qui se montrent lorsqu'une semblable veine est reçue sur une membrane tendue, laquelle sert alors d'instrument sonore donnant l'unisson.

§ 457. Quand l'instrument que l'on fait résonner dans le voisinage de l'appareil rend un son autre que l'unisson de celui qui est propre à la veine, les vibrations ne se succédant plus aux mêmes intervalles que les passages des renflements et des étranglements dus aux forces figuratrices, il ne peut plus y avoir concours incessant entre les deux espèces d'action; cependant, puisque l'unisson produit des effets si prononcés, on comprend a priori que des sons différents doivent déterminer des effets analogues, mais moins intenses, et d'autant moins que le son employé s'écarte davantage de l'unisson.

Pour tâcher de démêler, jusqu'à un certain point, ce qui se passe alors dans la veine, supposons celle-ci préalablement abandonnée à ses seules forces figuratrices, et prenons d'abord le cas le plus accessible au raisonnement, savoir celui où le son excité à proximité est très-voisin de l'unisson. Saisissons par la pensée l'instant où le milieu d'un étranglement dû aux forces figuratrices franchit la section contractée précisément au milieu de la durée d'une vibration ascendante; alors cette vibration concourra évidemment avec les forces figuratrices pour approfondir l'étranglement. Seulement, si le son de l'instrument est plus aigu que celui de la veine, et qu'ainsi la vibration a moins de durée que le passage de l'étranglement, une très-petite partie du bas de celui-ci aura été en lutte avec la fin de la vibration descendante qui a précédé, et une partie équivalente du haut sera également en lutte avec le commencement de la vibration descendante qui suivra, puisque ces vibrations descendantes tendent à renfler les portions de la veine sur lesquelles elles agissent. Si le son de l'instrument est, au contraire, plus grave que celui de la veine, il est clair que le concours aura lieu pour la totalité de l'étranglement, mais que le commencement de la vibration aura été en lutte avec la partie supérieure du renflement précédent, et que la fin de cette même vibration sera en lutte avec la partie inférieure du renflement suivant.

Il est aisé de voir qu'après un certain nombre de vibrations, un effet identique se reproduira, c'est-à-dire que le milieu d'une vibration ascendante coïncidera de nouveau avec le milieu du passage d'un étranglement, puis qu'il reviendra encore après un nombre de vibrations égal au précédent, et ainsi de suite périodiquement à des intervalles égaux. Si, par exemple, la durée d'une vibration est les $\frac{99}{100}$ de celle du passage d'un étranglement ou d'un renflement, la durée totale de 100 vibrations doubles, c'est-à-dire composées chacune d'une vibration ascendante et d'une vibration descendante, équivaudra à la durée totale du passage de 99 étranglements et de 99 renflements ; or il est facile de s'assurer que si l'on commence à compter cette durée à l'instant de l'une des coïncidences ci-dessus, elle se terminera aussi à l'instant d'une semblable coïncidence ; dans notre exemple, les coïncidences se reproduiront donc successivement après des intervalles égaux à la durée de cent vibrations doubles. Essayons maintenant de suivre les concours et les luttes pendant chacun de ces intervalles, ou, en d'autres termes, entre une coïncidence et la suivante.

Pour cela examinons ce qui a lieu au moment où finit la première moitié de l'un de ces mêmes intervalles. Dans l'exemple que nous avons pris, nous serons alors évidemment encore au milieu d'une vibration ascendante; mais, si nous réfléchissons que l'intervalle commence au passage de l'origine d'une division, et comprend exactement le passage de 99 divisions entières, nous reconnaîtrons que la fin de sa première moitié est l'instant du passage du milieu d'une division, et, par suite, du milieu d'un renflement; il y aura donc, pour cette vibration tout entière, opposition avec les forces figuratrices : ce sera le maximum de la lutte, et il est visible que celle-ci aura été jusque-là en augmentant, c'est-à-dire en occupant des portions de plus en plus grandes des vibrations successives, pour diminuer ensuite par les mêmes degrés.

Ces principes posés, voyons ce qu'on peut en déduire :

Chacun des étranglements pour lesquels il y aura coïncidence quittera la section contractée dans une phase plus avancée de la transformation, et ainsi se rompra à une moindre distance de l'orifice, que si l'on ne produisait pas de mouvements vibratoires; mais l'étranglement suivant, qui n'est déjà plus dans des conditions si favorables, ne pourra se rompre qu'un peu au-delà, et les ruptures subséquentes s'effectueront de même de plus en plus loin de l'orifice, jusqu'à celle de l'étranglement pour lequel la lutte entre les deux actions est à son maximum; après quoi les choses marcheront en sens inverse, c'est-à-dire que les lieux de rupture successifs remonteront, jusqu'à ce que revienne de nouveau un étranglement à coïncidence, puis tout recommencera dans le même ordre.

Dans une semblable veine, la partie continue doit donc aller en se raccourcissant et s'allongeant périodiquement; mais, à cause de la presque égalité entre les durées respectives d'une vibration et du passage d'un étranglement ou d'un renflement, ce ne sera évidemment qu'après un temps notable que le maximum de lutte se présentera, en sorte que l'allongement graduel de la partie continue s'effectuera avec assez de lenteur pour qu'on puisse le suivre des yeux; enfin il en sera nécessairement de même du raccourcissement subséquent, et ainsi de suite. Or ces conclusions sont nettement vérifiées par le fait du n° 9 du § 448.

Quant aux battements, ils résultent de la réaction mutuelle du son de l'instrument et de celui de la veine; car, bien que Savart ne le dise pas en propres termes, on peut conclure de la manière dont il expose le fait en question, que la veine sur laquelle il opérait tombait sur une membrane tendue; dans ce qui précède, il est vrai, nous avons supposé la veine uniquement soumise à ses forces figuratrices et aux vibrations dues au son de l'instrument; mais le raisonnement demeure évidemment le même dans le cas où l'effet des forces figuratrices est activé par l'unisson résultant du choc contre une membrane.

Bien que l'aspect général du phénomène soit d'accord avec les principes que je viens d'exposer, je pense néanmoins que les choses n'ont pas lieu, en réalité, d'une manière tout à fait aussi simple; dans les divisions naissantes où la lutte est notable, la réaction mutuelle des deux causes opposées produit sans doute des effets plus compliqués.

§ 458. Mais c'est surtout lorsque le son de l'instrument s'écarte davantage de l'unisson, que ces effets de réaction doivent se prononcer, car alors, dans aucune des divisions naissantes, il n'y a concours presque complet;

partout la lutte est notable ; et comme les divisions des cylindres, et, par suite, les divisions naturelles de la veine, sont susceptibles de varier en longueur par des causes assez légères, on doit admettre que les mouvements vibratoires modifieront cette longueur, et qu'ainsi leur influence prédominera plus ou moins sur celle des forces figuratrices ; les sons dont il s'agit doivent donc faire éprouver à la veine des changements analogues à ceux que détermine l'unisson, c'est-à-dire que la partie continue doit se raccourcir, que la partie trouble doit présenter des ventres et des nœuds, etc. Seulement il est clair que la prédominance de l'action vibratoire variera avec le rapport entre le son de l'instrument et celui qui est propre à la veine, et qu'en général elle sera d'autant moindre que le premier s'éloignera davantage du second ; il est clair aussi que la prédominance s'accentuera d'autant plus que le son de l'instrument sera plus intense, de sorte que des sons qui, excités à distance, sembleraient sans action sur la veine, pourront devenir efficaces si l'instrument sonore est mis en contact avec les parois du vase. Or toutes ces déductions s'accordent avec les faits des n^{os} 8 et 13 du § 448 ; et, ce qui les confirme davantage, c'est le fait du n^{o} 14, qui montre que, dans des conditions favorables, l'action des forces figuratrices peut être amenée à coïncider exactement avec celle des vibrations, même pour un écart considérable entre le son de l'instrument et celui qui est propre à la veine.

Dans les expériences de Savart sur l'influence des sons qui s'écartent de l'unisson, la veine n'était pas préalablement livrée à ses seules forces figuratrices ; elle tombait librement dans l'eau du vase inférieur, de sorte que l'effet des forces figuratrices se trouvait plus ou moins activé; mais on comprend que cette circonstance ne pouvait annuler les réactions que nous avons considérées, et devait simplement les rendre moins faciles.

Enfin, d'après une observation de Magnus § 487, lorsque la charge est très-faible, la veine est influencée par tous les sons produits dans son voisinage, à l'exception seulement des sons très-aigus. C'est qu'avec des charges très-faibles, le son principal est relativement grave, ainsi que tous ceux qui ne s'en écartent pas trop en dessus, et que, par suite, les vibrations correspondantes à ces sons ont plus d'amplitude, et luttent conséquemment avec plus d'avantage contre les forces figuratrices.

§ 459. Il serait, je crois, inutile, vu la complication des phénomènes, de chercher à étudier ceux-ci avec plus de précision ; d'ailleurs les vérifications expérimentales qu'on pourrait tirer du Mémoire de Savart ne seraient pas suffisamment nettes ; voici textuellement les seuls passages de ce Mémoire qui se rapportent aux faits en question :

« Des sons à l'octave et à la quinte graves, à la tierce « mineure, à la quarte superflue et à l'octave aiguë de « celui que donne le choc de la partie trouble contre « un corps renforçant, produisent sur la veine des mo- « difications analogues à celles que nous venons de « décrire(1), mais toutefois avec beaucoup moins d'éner- « gie; et il est des sons qui n'agissent en aucune ma- « nière sur ses dimensions et l'aspect qu'elle présente. »

Et plus loin, en parlant d'une veine reçue à une très-petite distance de l'orifice sur un corps solide épais :

(1) C'est-à-dire à celles que produit l'unisson.

« L'on remarque (de même que quand la veine est « entière) que les octaves grave et aiguë ainsi que la « quinte et la tierce mineure aiguë du son dont il « s'agit[1], influent également, mais à un moindre « degré, sur l'état de la veine. »

Enfin, à propos des modifications qu'éprouve, sous l'influence de l'unisson dû au choc contre une membrane tendue, une veine soustraite à toute autre influence étrangère :

« On obtient des résultats analogues, lorsque avec un « instrument à cordes on produit divers sons dans le « voisinage du réservoir, mais toujours l'un de ces sons « exerce sur la veine une influence plus grande que « tous les autres. »

Ces passages signifient-ils que, si l'on s'écarte notablement de l'unisson, il n'y a que l'octave et la quinte graves, la tierce mineure, la quarte superflue et l'octave aiguë qui modifient l'état de la veine? Cela est très-peu vraisemblable, car alors, au lieu de dire : « et il est des sons qui n'agissent en aucune manière etc. », Savart aurait dit : *et tous les sons autres que les précédents sont sans influence* etc. Doit-on interpréter ces mêmes passages en admettant que les sons qui s'y trouvent signalés sont les plus actifs après l'unisson, et que, parmi les tons restants de la gamme, les uns ont simplement moins d'efficacité, tandis que les autres n'exercent absolument aucune action? Mais, dans ce cas, peut-on croire que Savart se fût exprimé ainsi? Nous ferons remarquer, de plus, que la quarte superflue, indiquée dans le premier passage, est omise dans le second.

Ces énoncés si vagues montrent que Savart a peu

(1) De l'unisson.

étudié l'influence des sons plus ou moins éloignés de l'unisson, du moins dans les circonstances dont il s'agit ici.

§ 460. Pour terminer ce qui concerne l'influence d'un son excité à distance et différent de l'unisson, nous avons encore à rendre raison des faits du n° 10 du § 448.

Lorsque la veine tombe sur un corps qui ne peut rendre qu'un son déterminé, tel qu'un diapason, si l'on suppose, pour un instant, qu'elle n'éprouve aucune modification dans le nombre des masses isolées, les vibrations dues au choc de ces masses seront en général d'une autre période que celles du corps choqué, et conséquemment elles ne pourront provenir que de ce que chaque fois qu'une masse atteint ce corps l'air est expulsé d'entre eux, puis revient, pour être expulsé de nouveau à l'arrivée de la masse suivante, et ainsi de suite; or les ondes sonores produites de cette manière sont nécessairement très-faibles relativement à celles que font naître les vibrations du corps choqué lui-même; en outre, en faisant varier soit la charge, soit le diamètre de l'orifice, on est maître de diminuer autant qu'on le veut l'intervalle des deux sons.

Les vibrations de l'instrument (ou, dans le cas actuel, du corps choqué), transmises par l'air au vase et au liquide, n'ayant pas la même durée que les passages des étranglements et des renflements naissants dus aux forces figuratrices, il y a, comme nous l'avons exposé, lutte variable entre les deux genres d'action; mais, si les deux sons ne s'éloignent pas trop l'un de l'autre, la transformation de la veine, phénomène susceptible d'être influencé par des causes étrangères, peut, sous l'action des vibrations, allonger ou raccourcir les étranglements et les renflements naissants, de manière que la durée du passage de chacun d'eux soit précisément égale à celle d'une vibration et que les deux espèces d'actions soient constamment d'accord; ce point atteint, le son de la veine sera nécessairement à l'unisson de celui de l'instrument. Seulement, pour que les vibrations de l'instrument soient capables d'amener ce résultat, il faut évidemment qu'elles aient une énergie suffisante par rapport aux vibrations du son propre à la veine, puisque ces dernières tendent à favoriser l'action normale des forces figuratrices.

Mais cet état de la veine est un état forcé, puisque le mode naturel de la transformation est altéré. D'après cela, si quelque cause trouble brusquement la succession ou la transmission régulière des vibrations, les forces figuratrices devront aussitôt redevenir prépondérantes, et les étranglements et renflements naissants reprendront la longueur qui convient à l'action libre de ces forces. On s'explique donc sans peine cette particularité de l'expérience du n° 10 du § 448, qu'il suffit souvent d'un petit choc donné à l'appareil ou d'un changement de position du corps choqué, pour ramener subitement le son de la veine au ton qui lui est propre.

Nous avons supposé que, dans cette même expérience, le son de la veine se met à l'unisson de celui du corps choqué ; cependant, comme on peut le conclure de l'énoncé du numéro en question, Savart ne s'exprime point à cet égard en termes précis : il dit simplement que le son du corps choqué modifie celui de la veine, qu'il en change la période ; mais d'autres expériences que nous aurons bientôt à discuter permettent d'attribuer à ces mots le sens que nous leur avons donné.

§ 461. Enfin le n° 10 du § 448 nous apprend encore que lorsque l'écart des deux sons est fort petit, ces deux sons peuvent se faire entendre périodiquement ou même simultanément. Essayons d'expliquer également ces faits.

Supposons, pour fixer les idées, que le son propre à la veine soit quelque peu plus grave que celui du corps choqué. Dans le cas de l'unisson exact, le nombre des impulsions des masses en un temps donné serait la moitié du nombre des vibrations du corps dans le même temps, et conséquemment l'intervalle entre deux impulsions succesives serait égal à la durée de deux de ces vibrations; donc, dans la supposition ci-dessus, l'intervalle entre deux impulsions surpassera un peu la durée de deux vibrations, et si la réaction de ces vibrations sur les étranglements et les renflements naissants n'est pas assez puissante pour en modifier la longueur et amener ainsi l'unisson, le petit excès de durée des intervalles en question se maintiendra.

Cela étant, partons de la première impulsion. Celle-ci fera exécuter au corps une vibration dirigée de haut en bas, laquelle sera suivie d'une vibration de bas en haut; puis, un peu après le commencement d'une nouvelle vibration descendante, la deuxième impulsion arrivera; la troisième agira pendant la troisième vibration descendante, mais dans une phase un peu plus avancée de cette vibration; la quatrième impulsion aura lieu pendant la quatrième vibration descendante, et dans une phase encore un peu plus avancée; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'une impulsion coïncide sensiblement avec la fin d'une semblable vibration. Sous ces impulsions répétées, l'amplitude des vibrations du corps ira nécessairement en croissant, jusqu'à l'impulsion que nous avons considérée en dernier lieu. Mais, toujours en vertu du petit excès de durée des intervalles, les impulsions qui suivront s'effectueront pendant les vibrations montantes, et de même dans des phases de plus en plus avancées, en sorte qu'après un nombre d'impulsions égal à celui des précédentes, le corps sera frappé aussi au moment de la terminaison d'une vibration ; or ce second groupe d'impulsions détruira évidemment tout ce qu'avait fait le premier, c'est-à-dire diminuera par degrés l'amplitude des vibrations, et finira par l'annuler. Un troisième groupe d'impulsions ravivera ces vibrations, un quatrième les annulera de nouveau, et ainsi indéfiniment. Le son du corps choqué doit donc alternativement se renforcer et s'éteindre ; d'un autre côté, le son de la veine doit être plus faible quand les masses atteignent le corps pendant ses vibrations descendantes que quand elles le frappent pendant ses vibrations montantes, à cause de la différence des vitesses relatives, et l'on voit, de plus, que ce dernier son a ses minima pendant les renforcements de celui du corps, et ses maxima pendant les diminutions. Cela posé, si les vibrations du corps acquièrent, dans leurs plus grandes amplitudes, une certaine énergie, et si la vitesse relative des impulsions devient en même temps assez petite, le son de la veine pourra être entièrement masqué dans les instants de plus grande intensité de celui du corps, pour reparaître et dominer à son tour dans les instants intermédiaires ; et, par conséquent, les deux sons se feront entendre périodiquement.

Mais si le corps n'est capable d'exécuter que des vibrations de peu d'amplitude, et s'il est tenu à une grande distance de l'orifice, il peut se faire que la vitesse relative des impulsions demeure toujours considérable, de manière que le son de la veine soit sensiblement uniforme, et que celui du corps, dans ses maxima, n'ait point assez d'intensité pour le masquer. Alors le premier ne cessera point d'être perçu, et conséquemment, pendant les périodes de renforcement du second, ils se feront entendre tous les deux à la fois. C'est sans doute dans ce sens qu'il faut interpréter les mots : *ou même simultanément*, qui sont empruntés textuellement à Savart.

§ 462. Reprenons actuellement le cas où l'on fait rendre à un instrument sonore l'unisson exact du son propre à la veine. Si l'instrument, au lieu d'agir à distance, est mis en contact avec les parois du vase d'où la veine s'échappe, il est clair que les vibrations communiquées à ces parois et propagées dans le liquide seront bien plus énergiques, et que, par suite, les modifications de la veine devront être bien plus prononcées; en outre, on comprend que les petites irrégularités dont nous avons parlé au § 455 pourront alors être entièrement effacées. Le contenu du n° 11 du § 448 s'explique donc de lui-même.

§ 463. Alors aussi on observe (n° 12 du § 448), dans l'axe de la veine, à partir de l'extrémité inférieure de la partie continue, un autre système de ventres et de nœuds plus minces et plus courts, lequel est dû, ainsi que Savart le fait remarquer, aux sphérules qui accompagnent les masses. Je dis aux sphérules, car, dans le cas actuel, la partie continue de la veine étant fort raccourcie, l'accélération due à la pesanteur ne peut allonger notablement les étranglements, de sorte que ceux-ci donnent lieu à des filets minces, et, par suite, à de véritables sphérules (§ 383).

Ici se présente une difficulté apparente. Lorsque la veine est soustraite à toute action vibratoire, sa partie trouble est exempte de ventres et de nœuds; il semble donc que, sous l'action des forces figuratrices seules, les masses arrivent à la forme sphérique sans exécuter d'oscillations sensibles, et que les oscillations de forme ont lieu uniquement dans le cas où les forces figuratrices sont activées par des vibrations; or le mode de production des sphérules ne peut en aucune manière être influencé par les vibrations, car celles-ci n'agissent directement qu'à la section contractée; plus bas que cette section, leur effet se borne à des vitesses acquises, qui accélèrent le développement des renflements et l'approfondissement des étranglements, puis la conversion de chacun de ces derniers en un filet, et ce filet ne se transforme ensuite, en fournissant ainsi les sphérules, que par les seules forces figuratrices, qui y naissent comme dans les cylindres liquides instables; cependant ces sphérules exécutent des oscillations de forme, puisque la trace de leur passage devant l'œil offre des ventres et des nœuds.

Afin d'éclaircir ce point, examinons attentivement quelles sont les circonstances à l'égard des sphérules et à l'égard des grosses masses. D'après ce qui a été dit au § 375, le filet doit généralement se partager en trois parties, dont les deux extrêmes vont se réunir respectivement aux deux grosses masses entre lesquelles ce même filet se trouvait compris, tandis que l'intermédiaire se contracte à la fois et symétriquement du haut et du bas, en se renflant dans le sens horizontal, pour donner la sphérule dont nous nous occupons. En vertu de cette simultanéité et de cette symétrie d'action, la petite portion de liquide en question atteint la forme sphérique vers laquelle elle tend; mais elle l'atteint avec une vitesse acquise, et ainsi la dépasse nécessairement, de manière que son diamètre vertical devient moindre et son diamètre horizontal plus grand que le diamètre de la sphère de même volume; de là les oscillations de forme des sphérules, et, par suite, les ventres et les nœuds qui en résultent.

Les choses ne se passent point identiquement de la même façon dans la grosse masse suspendue au filet et qui s'isole par la rupture de celui-ci : en effet, un instant avant cette séparation, la masse dont il s'agit était déjà rendue libre à sa partie inférieure, par la rupture du filet formé entre elle et la masse qui la précède ; ici donc les ruptures au-dessous et au-dessus de la masse, et conséquemment les deux contractions qui tendent à aplatir cette dernière dans le sens vertical, ne se font point tout à fait en même temps ; mais la différence est nécessairement fort petite, et il en résulte que les grosses masses doivent aussi exécuter des oscillations de forme. Or c'est, en effet, ce que Magnus a constaté (§ 487); mais il a reconnu que les masses successives ne se détachent pas exactement à la même distance de l'orifice, de sorte qu'elles ne passent pas aux mêmes points dans leurs maxima respectifs d'élargissement et d'allongement, et qu'ainsi on ne peut observer de ventres et de nœuds. Il est évident, d'ailleurs, que ces oscillations de forme doivent être beaucoup moins prononcées que lorsque la veine est sous l'influence d'un mouvement vibratoire.

§ 464. Revenons, pour un instant, aux sphérules. Lorsqu'un filet se transforme, les petits étranglements qui s'y produisent se changent eux-mêmes en des filets plus déliés, dont chacun se rompt en deux points, et fournit ainsi, par sa portion moyenne, une sphérule très-minime (§ 375). Ces dernières sphérules sont fréquemment rejetées hors de l'axe de la veine, entraînées sans doute par les mouvements de l'air; mais comme leur mode de génération est le même que celui des sphérules moins petites dont il a été question plus haut, elles doivent également exécuter des oscillations de forme, et Savart dit, en effet, que cela a lieu, bien qu'il n'indique point par quel moyen il l'a constaté : la trajectoire décrite par celles de ces sphérules qui sont lancées hors de la veine laisse probablement dans l'œil une trace suffisante pour qu'on y observe des ventres et des nœuds; peut-être aussi distingue-t-on la figure apparente résultant du passage de celles qui se maintiennent dans l'axe.

§ 465. Maintenant produisons de nouveau un son qui s'écarte de celui de la veine, mais continuons à placer l'instrument sonore en contact avec le vase, de manière à donner plus d'énergie à l'action des vibrations. On voit, par le n° 13 du § 448, que, dans ce cas, presque tous les sons agissent sur la veine. Il semble encore, à la vérité, y avoir quelque vague dans ces mots *presque tous les sons* employés par Savart; mais on ne peut croire qu'ils signifient que des sons inefficaces alternent avec des sons efficaces. En effet, supposons, pour un instant, l'inefficacité de certains sons intermédiaires, et imaginons que le son de l'instrument aille en s'éloignant d'une manière continue de celui de la veine; alors, quand on quittera l'un de ces sons inefficaces, il faudra : ou bien que l'action sur la veine, de nulle qu'elle était pour ce son, augmente graduellement jusqu'à un certain point, ce qui serait contraire à l'énoncé du numéro cité, d'après lequel l'action diminue à mesure qu'on s'écarte de l'unisson ; ou bien que cette action devienne subitement prononcée, ce qui n'est guère admissible. Il est donc très-probable que l'idée de sons inefficaces renfermée dans les mots : *presque tous les sons,* se rapporte simplement aux sons par trop distants de celui de la veine, lesquels, en vertu de l'énoncé en question, ne doivent produire qu'une action insensible.

§ 466. Nous avons dit que des vibrations différant en période, entre certaines limites, de celles du son de la veine, peuvent amener ce dernier à l'unisson de celui de l'instrument. Or la condition la plus favorable à la production de ce résultat, doit évidemment être le contact de l'instrument sonore avec les parois du vase, à cause de la transmission plus immédiate des vibrations. Et en effet, tandis que dans le cas du n° 10 du § 448, le phénomène n'est réalisable que dans un intervalle de tierce mineure, ici, comme on le voit par le n° 14 du même paragraphe, il s'étend à des intervalles d'une quinte en dessus du son principal et de plus d'une octave en dessous; ajoutons que Savart ne se sert plus, comme dans le premier cas, de termes peu précis : il dit nettement que le son de la veine se met à l'unisson de celui de l'instrument.

§ 467. Une limite supérieure aussi élevée que la quinte semble, au premier abord, être en opposition avec certains résultats de notre étude des cylindres liquides. En effet, pour que le son de la veine monte d'une quinte, il faut nécessairement que le nombre des masses isolées qui vont, dans un temps donné, heurter la membrane tendue, augmente dans le rapport de 2 à 3, et que, par suite, il en soit de même du nombre des divisions naissantes qui passent, dans le même temps, à la section contractée; et comme, sous une charge constante, la longueur des divisions naissantes est évidemment en raison inverse de ce dernier nombre, il s'ensuit que, du son principal à la quinte de celui-ci, les divisions naissantes se raccourcissent dans le rapport de 3 à 2; mais nous savons (§ 443), que lorsqu'une veine d'eau rend le son qui lui est propre, la longueur de ses divisions naissantes est égale à 4,38 fois le diamètre de la section contractée; si donc, par la seule action d'un instrument sonore, le son d'une semblable veine monte d'une quinte, la longueur de ses divisions naissantes se réduira aux $\frac{2}{3}$ de la valeur ci-dessus, c'est-à-dire à 2,92 fois le diamètre de la section contractée; or ce nombre est un peu inférieur à la limite de la stabilité des cylindres liquides, limite qui est, comme nous le savons aussi, égale à 3,14, et cependant nous avons démontré (§ 371) que lorsqu'un cylindre liquide se transforme, la longueur de ses divisions ne peut être moindre que cette même limite.

La difficulté n'est qu'apparente. La démonstration citée suppose que le cylindre commence spontanément à se transformer, et alors elle est rigoureusement vraie; mais elle ne s'applique point au cas où les étranglements et les renflements sont originairement formés par une cause étrangère suffisamment énergique. En effet, la démonstration dont il s'agit consiste essentiellement à faire voir que si, dans les premières phases de la transformation, l'on considère l'ensemble d'un étranglement et d'un renflement, ensemble dont la longueur équivaut à celle d'une division, tout se passe dans cette portion du cylindre comme si ses deux bases étaient solides, en sorte que la transformation ne peut s'établir spontanément qu'avec un écartement de ces bases au moins égal à la limite de la stabilité; mais si, dans un cylindre réalisé entre deux disques solides dont la distance est un peu plus petite que la limite de la stabilité, la transformation ne saurait commencer d'elle-même, nous savons (§§ 396 et 399 à 401) qu'elle continue d'elle-même si elle a été commencée par une cause étrangère qui a accumulé le liquide en certaine quantité vers l'un des disques, de manière à déterminer artificiellement un renflement et un étranglement suffisamment prononcés. La démonstration que nous avons rappelée ne peut donc plus être invoquée lorsque, dans une veine liquide, les étranglements et les renflements naissants sont formés par des vibrations énergiques. Alors, si la somme des longueurs de l'un de ces étranglements et de l'un de ces renflements, ou son égale la longueur d'une division, est un peu inférieure à la limite de la stabilité, la transformation pourra partir de ce mode anormal, et plus les vibrations seront intenses, plus le dernier son pour lequel existera la possibilité du phénomène sera élevé au-dessus du son principal.

Si le son étranger est au-dessous du son principal, et tend ainsi à donner aux divisions naissantes une longueur nécessairement supérieure à la limite de la stabilité, il ne rencontrera point l'espèce de résistance que nous venons de signaler en deçà de cette limite, en sorte que la possibilité du phénomène s'étendra beaucoup plus loin, et nous voyons, en effet, que, dans les expériences de Savart, elle embrasse un intervalle de plus d'une octave.

Il y a encore une autre raison pour que le phénomène soit moins limité au-dessous du son principal qu'au-dessus : dans un même instrument sonore, l'amplitude des vibrations augmente généralement avec la gravité du son; or on comprend que plus l'amplitude des vibrations transmises est considérable, plus est grand l'excès de liquide que chaque vibration descendante tend à pousser dans la veine pour façonner un renflement naissant, et plus est grande aussi la soustraction de liquide que chaque vibration ascendante tend à opérer pour creuser un étranglement naissant. Si donc, à mesure que le son de l'instrument s'écarte du son principal, soit en dessous, soit en dessus, la longueur des divisions naissantes que les vibrations tendent à former devient de plus en plus supérieure ou de plus en plus inférieure à celle des divisions naissantes que tendent à former de leur côté les forces figuratrices, et si de là naît évidemment une lutte de plus en plus forte avec ces dernières forces, d'autre part, au-dessous du son principal, les vibrations agissent de plus en plus énergiquement pour faire prévaloir le nouveau mode de transformation, et cet accroissement d'action doit compenser plus ou moins l'accroissement de lutte.

Remarquons ici que dans le cas d'un son très-grave par rapport au son principal, le nouveau mode de transformation ne s'établit point de la même manière que dans celui d'un son qui ne s'éloigne pas beaucoup du son principal; dans ce dernier cas, en effet, à cause du peu de différence de longueur entre les divisions naissantes des deux espèces, il est bien probable que les forces figuratrices modifient simplement leur propre action, en allongeant ou raccourcissant les divisions naissantes qui leur conviennent, de façon à les faire coïncider avec celles qui conviennent aux vibrations; mais lorsque le son de l'instrument est assez bas pour que la longueur de ces dernières divisions surpasse considérablement celle des autres, lorsque, par exemple, l'instrument rend l'octave grave, et que les vibrations transmises sont assez intenses pour imposer à la veine leur mode de transformation, on doit admettre que l'action des forces figuratrices est complétement détruite, en sorte qu'il n'y a plus modification du premier mode, qui s'adapte au second, mais substitution absolue du second au premier.

Dans le cas de la quinte aiguë, il y a deux autres raisons qui aident au changement de son de la veine : en premier lieu, après l'action immédiate de chaque vibration, la déformation doit augmenter par les vitesses acquises; et, en deuxième lieu, les divisions, et par suite les étranglements et les renflements, s'allongeant pendant leur descente, la somme des longueurs d'un étranglement et d'un renflement, d'abord inférieure à la limite de la stabilité, va aussitôt en se rapprochant de cette limite, en sorte que le progrès de la transformation d'après le mode anormal originairement imprimé devient plus facile.

§ 468. Ainsi, la théorie rend raison de tous les phénomènes résultant de l'action des vibrations sur les veines lancées suivant la verticale descendante, de tous ceux, du moins, que Savart décrit d'une manière précise; passons aux veines lancées dans d'autres directions.

Et d'abord, puisque, dans ces veines, il y a également transformation graduelle en masses isolées, les sons doivent nécessairement exercer sur elles une influence analogue à celle qu'ils exercent sur les veines lancées verticalement de haut en bas; le nº 15 du § 448 n'a donc pas besoin d'explication.

§ 469. Mais il n'en est pas de même du nº 16. Si toutes les divisions, en atteignant l'une après l'autre l'extrémité de la partie continue, s'isolaient identiquement de la même manière, et si toutes les masses partaient de là avec la vitesse précisément correspondante au mouvement de translation du liquide en ce point, celles-ci décriraient toutes exactement la même trajectoire, et dès lors la partie discontinue de la veine ne pourrait présenter d'éparpillement ou de gerbe; il y a donc, comme Savart le fait remarquer, des irrégularités dans l'émission des masses isolées de l'extrémité de la partie continue; ces irrégularités, du reste, doivent être fort petites, car la gerbe n'a pas une grande largeur. J'avais pensé d'abord qu'elles provenaient des mêmes causes que celles dont il a été question au § 455. Mais si cela était, la suppression des actions étrangères devrait faire disparaître la gerbe, et réduire ainsi la totalité de la veine à un jet unique; or c'est ce que l'expérience n'a point confirmé : en employant, à l'égard d'une semblable veine, les moyens dont Savart s'est servi dans le cas des veines verticales descendantes, c'est-à-dire en recevant la partie discontinue sur une planche épaisse convenablement inclinée, et en plaçant des corps mous sous le vase d'où la veine s'échappait, sous celui dans lequel elle se rendait et sous les supports, je n'ai pu réussir à faire éprouver à la gerbe une diminution notable. On doit inférer de là que les irrégularités ne sont point dues à des mouvements vibratoires, et que, par conséquent, elles affectent l'action même des forces figuratrices; on comprend, en effet, vu la nature du phénomène de la transformation, que des causes perturbatrices même légères doivent influer sur la parfaite identité de toutes les divisions qui naissent l'une après l'autre à la section contractée; nous avons vu, par exemple, dans les expériences des §§ 361 à 369, une cause étrangère altérer l'égalité de longueur des divisions d'un cylindre. Cela posé, nous allons montrer que de petites différences de cette espèce dans les divisions naissantes d'une veine lancée sous une obliquité convenable, doivent nécessairement donner lieu à un certain éparpillement de la partie discontinue.

Considérons en particulier deux des étranglements avec le renflement qu'ils comprennent entre eux. Ainsi que nous le savons, chacun de ces deux étranglements, d'abord très-faiblement indiqué lorsqu'il quitte la section contractée, s'approfondit ensuite graduellement dans le trajet de la partie continue, en envoyant la moitié de son liquide dans le renflement; celui-ci reçoit donc, par son extrémité antérieure, du liquide qui y est chassé en sens contraire du mouvement de translation, et, par son extrémité postérieure, du liquide qui y est chassé dans le sens même de ce mouvement, en sorte que sa vitesse de translation tend à être diminuée par le premier de ces afflux et à être augmentée par le second. Maintenant, bien que ces deux actions opposées soit en général inégales, parce que l'étranglement antérieur est, à chaque instant, dans une phase un peu plus avancée de transformation que le postérieur, cependant, si les deux étranglements étaient parfaitement identiques à leurs naissances respectives, et si, par suite, ils ont subi identiquement, quoique non tout à fait aux mêmes instants, les mêmes modifications jusqu'à leurs ruptures respectives, il est évident qu'après ces deux ruptures, c'est-à-dire au moment où le renflement se trouvera à l'état de masse isolée, la somme des quantités de mouvement apportées dans cette masse par l'étranglement antérieur aura été absolument compensée par celle des quantités de mouvement qui y ont été apportées, dans l'autre sens, par l'étranglement postérieur, et qu'ainsi cette même masse quittera la partie continue avec la vitesse exactement correspondante au mouvement général de translation. Mais il est clair que la compensation ne sera plus entière si les deux étranglements différaient à leurs naissances, si, par exemple, ils étaient inégaux en longueur : il résulte de la moindre durée de la transformation quand les divisions sont plus longues, et, par suite, quand les étranglements sont plus longs, que le plus allongé des deux étranglements dont il s'agit s'approfondira plus rapidement que l'autre; et comme, en vertu de son excès de longueur, il renferme plus de liquide, il enverra dans le renflement un plus grand afflux de matière avec des vitesses plus grandes, et conséquemment une plus grande quantité de mouvement. Si donc ce même étranglement est le postérieur, la masse quittera la partie continue avec un excès de vitesse, et si c'est l'antérieur, elle partira avec un déficit de vitesse. Ainsi, de petites différences de longueur dans les étranglements naissants auront pour résultat d'établir de petites inégalités entre les vitesses des masses isolées successives ; mais dès lors ces masses parcourront nécessairement des paraboles d'inégale amplitude, et par conséquent s'éparpilleront dans un plan vertical, en formant la gerbe.

Cette explication suppose que les causes perturbatrices ne produisent, dans les étranglements, aucune irrégularité dans des sens perpendiculaires à l'axe de la veine ; or on a vu (§§ 359 et 413) que, pendant la transformation d'un cylindre liquide instable, la figure tend avec énergie à demeurer symétrique par rapport à son axe, et l'on comprend qu'il doit en être de même des étranglements et des renflements de notre veine courbe, de sorte que des irrégularités dans un sens normal à celle-ci ne sauraient persister.

D'après cette même explication, il est clair qu'il y a deux limites extrêmes pour lesquelles l'éparpillement est nécessairement nul, savoir lorsque la veine est lancée verticalement de haut en bas et lorsqu'elle est lancée verticalement de bas en haut, puisque, dans ces deux cas, toutes les masses isolées parcourent une même trajectoire rectiligne ; si donc on passe du premier au second en faisant varier par degrés la direction suivant laquelle le jet est lancé, la gerbe ne pourra commencer à se montrer d'une manière bien distincte qu'à partir d'un certain angle entre cette direction et la verticale descendante, et elle devra cesser d'être bien apparente au delà d'un autre certain angle. De plus, tant que la veine sera lancée dans des directions obliquement descendantes, et même dans la direction horizontale, on comprend que les trajectoires décrites par les masses s'échappant avec des vitesses différentes ne s'écarteront pas assez les unes des autres pour que la gerbe se prononce nettement, en sorte que la première direction qui commencera à rendre la gerbe visible, sera obliquement montante. Toutes ces conclusions sont d'accord avec les faits du numéro que nous discutons.

Nous admettons, on le voit, que les inégalités entre les étranglements naissants ne dépendent point de la direction suivant laquelle le jet est lancé: et, en effet, il n'y a aucune raison plausible d'attribuer ces inégalités à l'obliquité montante du jet. Si nous n'en avons point parlé en traitant des veines verticales descendantes, c'est que, dans ces dernières veines, elles ne peuvent donner lieu à aucune apparence d'un genre particulier; elles ne font alors évidemment qu'augmenter un peu, dans l'axe de la veine, l'inexactitude de la superposition des systèmes individuels de ventres et de nœuds, et elles constituent ainsi simplement une influence à ajouter à celles qui sont mentionnées au § 455. Quant à la nature des causes perturbatrices qui produisent les inégalités en question, il serait sans doute bien difficile de la découvrir; mais, quelle qu'elle soit, l'éparpillement de la partie discontinue dans les veines lancées sous un angle convenable nous révèle la présence de ces causes.

§ 470. Maintenant, une veine étant lancée sous un angle tel que la gerbe soit bien formée, soumettons-la à l'influence d'un instrument sonore. Le son qui raccourcira le plus la partie continue, sera encore évidemment celui dont les vibrations se succèdent aux mêmes intervalles que les passages, à la section contractée, des étranglements et des renflements dus aux forces figuratrices. Mais ces vibrations étant parfaitement régulières et isochrones, elles empêcheront, si elles ont une intensité suffisante, les causes perturbatrices de modifier les étranglements naissants ; en d'autres termes, en activant la transformation, elles y apporteront leur régularité, en sorte que tous les étranglements naissants auront même longueur, et qu'ainsi toutes les masses isolées suivront identiquement la même trajectoire (§ précéd.) ; sous l'influence de ce son, la gerbe devra donc disparaître, et la totalité de la veine se réduira à un jet unique présentant un système bien régulier de ventres et de nœuds.

§ 471. Quant aux effets singuliers de réduction de la gerbe à deux ou à trois jets sous l'influence d'autres sons, il fallait, pour en tenter l'explication, connaître les rapports des sons dont il s'agit avec le son principal, rapports que Savart n'indique point. D'après cela, comme ces phénomènes ne sont pas les moins curieux de ceux qui résultent de l'action des vibrations sur les veines liquides, je me suis décidé à essayer l'expérience.

L'orifice que j'ai employé avait un diamètre de 3 millimètres ; il était percé au centre d'une plaque circulaire en laiton de 12 centimètres de diamètre (1), inclinée de manière que le jet fût lancé sous un angle d'environ 35° au-dessus de l'horizontale ; cette plaque formait l'une des bases d'un tambour cylindrique, lequel communiquait, par un tube horizontal large et court, avec la

(1) Ce grand diamètre a été motivé par la nécessité de laisser aux vibrations de la plaque une liberté suffisante.

partie inférieure d'un grand vase de Mariotte; la charge était de 34 centimètres; enfin l'instrument sonore était un violoncelle, dont on faisait reposer la base sur les supports de l'appareil.

La gerbe étant bien formée, on a d'abord cherché par tâtonnement le son principal, ou, en d'autres termes, celui qui ramenait nettement la totalité de la veine à un jet unique avec un système bien régulier de ventres et de nœuds, et qui, en même temps, faisait naître le premier ventre très-près de l'orifice. Ce point atteint, on a haussé le son de l'instrument par demi-tons successifs. Alors l'influence des vibrations a été en diminuant: le jet a commencé par perdre de sa régularité, puis la gerbe a graduellement reparu, après quoi elle s'est maintenue, sans se réduire à deux ni à trois jets. On est revenu ensuite au son principal, et l'on a fait descendre le son de l'instrument, à partir de là, par demi-tons aussi. Les mêmes effets, savoir l'altération de la régularité du jet et la réapparition progressive de la gerbe, se sont manifestés; mais, en approchant de l'octave grave, on a remarqué une tendance au changement de la gerbe en un double jet, et, lorsqu'on est arrivé à ce dernier son, la gerbe a été nettement remplacée par deux jets avec des systèmes réguliers de ventres et de nœuds. On a continué à abaisser le son, et les deux jets se sont montrés de même, jusqu'à la tierce au-dessous de l'octave grave; plus bas encore, et tant qu'on n'a pas atteint la double octave grave, on a obtenu tantôt deux, tantôt trois jets; seulement la quinte a donné quelquefois un jet unique; enfin, pour la double octave grave, on a observé constamment trois jets. Dans tous ces cas, les jets avaient toujours chacun leur système de ventres et de nœuds.

Ces faits sont moins restreints que ceux qui sont énoncés dans le n° 16 du § 448; en effet, d'après ce numéro, qui reproduit le sens des expressions de Savart, ce serait uniquement sous l'influence du son principal que la gerbe se contracterait en un seul jet, et il n'y aurait que deux autres sons déterminés et différents qui feraient apparaître respectivement deux jets et trois jets distincts. Mais l'absence d'indication des rapports entre ces sons et le son principal, suffit pour montrer que Savart n'a pas donné toute son attention aux phénomènes de ce genre, et qu'après les avoir observés dans des cas isolés, il n'a pas cherché s'ils étaient susceptibles d'extension.

§ 472. Voyons actuellement si la théorie peut rendre raison de ces mêmes phénomènes. Commençons par l'octave grave. Pour ce son, la durée d'une vibration est double de celle du passage d'un étranglement ou d'un renflement à la section contractée, d'où nous conclurons sans peine que les divisions qui naîtraient sous l'action seule de l'octave grave du son principal, seraient doubles en longueur de celles que déterminerait de son côté l'action isolée des forces figuratrices. D'après cela, nous pouvons admettre que chacune des premières embrasse exactement l'ensemble de deux des secondes: car, de cette manière, à toutes les sections qui terminent ces ensembles ou couples, il y a évidemment concours absolu entre les deux genres d'action, les sections dont il s'agit constituant à la fois les milieux des étranglements qui résulteraient des vibrations, et des milieux d'étranglements dus aux forces figuratrices. Maintenant, examinons ce qui doit se passer, pendant la transformation, dans l'un quelconque de ces mêmes couples de divisions. Ce couple se composant de deux divisions entières, contient deux renflements qui comprennent entre eux un étranglement, et se termine par deux demi-étranglements ; or, tandis que les étranglements entiers auxquels ces terminaisons appartiennent sont, comme nous l'avons vu, favorisés par les vibrations, il est clair que l'étranglement intermédiaire est, au contraire, en lutte, puisque son milieu, qui est le milieu du couple, correspond au milieu de la division que les vibrations tendent à produire, et, par suite, au milieu du renflement de celle-ci ; chacun des renflements que font naître dans la veine les forces figuratrices, est donc adjacent à deux étranglements inégalement sollicités. En outre, les étranglements favorisés par les vibrations doivent s'allonger sous l'influence de ces dernières, puisque les étranglements qu'elles produiraient à elles seules auraient une longueur deux fois plus grande, et comme la longueur de chacun des couples de divisions ci-dessus considérés demeure la même qu'en l'absence du son de l'instrument, il s'ensuit que les étranglements intermédiaires aux précédents, c'est-à-dire ceux qui occupent les milieux des couples et qui sont en lutte avec les vibrations, doivent être raccourcis. On peut donc admettre que les étranglements favorisés, bien que, dès leur naissance, ils soient déjà plus amincis que les étranglements en lutte, contiennent cependant alors, à cause de leur excès de longueur, plus de liquide que ces derniers; et comme, par la double raison qu'ils sont plus longs et qu'ils sont activés par les vibrations, ils arrivent plus rapidement à leur rupture, on voit qu'ils enverront dans les renflements plus de matière avec plus de vitesse, et, par suite, une plus grande quantité de mouvement. Tous les renflements se trouveront ainsi dans la condition que nous avons analysée dans le § 469, et conséquemment les masses isolées, en abandonnant la partie continue, auront les unes un petit excès de vitesse, et les autres un petit déficit de vitesse. Mais ici les vibrations imprimant leur régularité aux phénomènes, rendent identiques entre eux, à leurs naissances, tous les étranglements favorisés, et rendent de même identiques entre eux tous les étranglements en lutte, en sorte que toutes les masses formées par les renflements qui, dans le parcours de la partie continue, avaient en arrière l'étranglement favorisé, partent avec un même excès de vitesse et décrivent conséquemment une même trajectoire, et que toutes celles qui proviennent des renflements pour lesquels l'étranglement favorisé était en avant, partent avec un même déficit de vitesse et décrivent une autre même trajectoire; donc, sous l'influence de l'octave grave du son principal, la gerbe doit être remplacée par deux jets séparés.

Cependant il ne serait pas impossible que le son considéré fît disparaître la gerbe ; en effet, ce son étant déjà très-grave, du moins à l'égard de la veine sur laquelle j'ai opéré, ses vibrations ont beaucoup d'amplitude, et pourraient agir avec assez d'énergie pour empêcher la formation des étranglements en lutte, et ne laisser ainsi dans la veine que les divisions qu'elles tendent à produire à elles seules, auquel cas toutes les masses isolées auraient nécessairement une même vitesse, savoir la vitesse normale.

Examinons, en second lieu, l'influence de la quinte grave du son précédent, ou, en d'autres termes, de la double quinte grave du son principal. Les vibrations de cette double quinte étant trois fois moins rapides que celles du son principal, on en conclut aisément que chacune des divisions qu'elles tendent par elles-mêmes à déterminer dans la veine, comprend exactement trois des divisions dues aux forces figuratrices. On voit, de plus, que, des trois renflements contenus dans cet ensemble de divisions, le postérieur a derrière lui un étranglement favorisé, et devant lui un étranglement en lutte, que l'antérieur a, au contraire, devant lui un étranglement favorisé, et derrière lui un étranglement en lutte, et enfin que l'intermédiaire se trouve entre ces deux étranglements en lutte, lesquels sont identiques entre eux à leurs naissances respectives. D'après cela, les quantités de mouvement se distribueront nécessairement, dans les masses isolées provenant de ces trois divisions, de telle manière que la postérieure quittera la partie continue avec une vitesse supérieure à la vitesse normale, que l'antérieure prendra une vitesse inférieure à cette vitesse normale, et que l'intermédiaire partira avec la vitesse normale elle-même; et comme, toujours à cause de la parfaite régularité des vibrations, les choses se passent identiquement de même dans chacun des systèmes de trois divisions, il ne pourra y avoir, dans la partie discontinue, que trois vitesses différentes. Si donc l'action des vibrations ne masque point entièrement celle qu'exerçaient librement, avant son influence, les forces figuratrices, la gerbe se résoudra en trois jets distincts; et si, au contraire, l'action des forces figuratrices est complétement dominée, ce qui doit avoir lieu plus aisément que pour l'octave grave, à cause de l'amplitude plus grande encore des vibrations, il n'y aura qu'un jet, ainsi que nous l'avons fait voir plus haut.

Quant à la séparation en deux jets sous l'influence aussi de la double quinte grave, résultat que l'expérience a donné également, on peut s'en rendre raison de la manière suivante. Lorsque l'action des vibrations est prépondérante, et qu'ainsi il ne naît à la section contractée que les divisions qu'elle détermine, celles-ci ont une grande longueur, puisque chacune d'elles tient la place de trois des divisions que dessineraient les forces figuratrices; or nous savons que toute figure liquide dont une dimension est considérable relativement aux deux autres, tend à se partager en masses isolées; on peut donc admettre que, dans les divisions dont il s'agit, si les vitesses transversales acquises ne sont pas suffisantes pour s'y opposer, il se développe de nouvelles forces figuratrices qui partagent chacune de ces mêmes divisions en deux autres, en creusant un étranglement en son milieu, et dès lors, comme tous les étranglements ainsi produits sont évidemment en lutte, le raisonnement employé à l'égard de l'octave grave montre que l'on doit obtenir deux jets.

Remarquons ici que les forces figuratrices anormales dont il vient d'être question ne sauraient former, dans chaque grande division, plus d'un étranglement; en effet, si elles en formaient deux, ce qui partagerait chaque grande division en trois petites, ces dernières auraient la même longueur que celles de la veine non soumise à l'influence de l'instrument sonore; mais, pour que cela fût possible, il faudrait que les nouvelles divisions n'éprouvassent pas plus de résistance à se dessiner qu'en l'absence de toute action étrangère : car on peut conclure de ce qui a lieu dans les cylindres, que, dans toute figure liquide plus ou moins analogue, la longueur des divisions augmente avec les résistances; or les vitesses transversales acquises déterminant, dans nos grandes divisions, une tendance à persévérer dans le mode de transformation imprimé par les vibrations, constituent une résistance à un partage ultérieur.

Passons, en troisième lieu, à la double octave grave. Ici chacune des divisions qui naîtraient sous l'action seule des vibrations, comprendrait évidemment quatre des divisions qui résulteraient des seules forces figuratrices; or, si ces deux actions se combinaient, il semble que l'on devrait avoir quatre jets distincts : car il est aisé de voir que, dans les trois étranglements qui se formeraient alors, la lutte serait inégale, qu'elle serait plus forte pour l'étranglement du milieu que pour les deux autres, en sorte que chacun des deux renflements compris entre ces trois étranglements recevrait des deux côtés des quantités de mouvement inégales, et enfin que les différences seraient plus grandes pour les deux renflements extrêmes, dont chacun se trouverait compris entre un étranglement en lutte et un étranglement favorisé. Mais, d'une part, les vibrations dont il s'agit ayant une amplitude considérable, on conçoit que leur action doit toujours effacer celle des forces figuratrices, et, d'autre part, les divisions formées de cette manière étant très-longues, on conçoit également, d'après ce que nous avons dit plus haut, qu'il doit s'y engendrer de nouvelles forces figuratrices qui en opèrent le fractionnement; or, par la raison de résistance indiquée de même plus haut, ce fractionnement doit donner ici au plus trois parties, ce qui, vu la distribution des luttes et des concours et la régularisation apportée par les vibrations, doit convertir la gerbe en trois jets seulement.

Reste, en quatrième lieu, l'action des sons compris entre l'octave grave et la quinte en dessous, et entre celle-ci et la double octave grave. Pour ces sons, il n'y a plus de rapport simple entre les longueurs des divisions qui résulteraient respectivement des vibrations seules et des forces figuratrices seules; mais on admettra sans peine que, sous l'influence de ceux qui avoisinent, soit en dessus, soit en dessous, la double quinte grave, et dans le cas où l'effet des vibrations ne se substitue pas complétement à celui des forces figuratrices, les divisions dues à ces dernières forces se raccourcissent ou s'allongent un peu, de manière à permettre, aux limites qui séparent les systèmes successifs de trois de ces divisions, le concours absolu des deux genres d'actions, et à rétablir ainsi le rapport simple de 3 à 1 appartenant à la double quinte; d'où la résolution en trois jets. Sous cette même influence, comme sous celle de la double quinte, si les vibrations sont prépondérantes, mais pas assez pour s'opposer à un développement ultérieur de forces figuratrices, chaque grande division ne pourra se partager qu'en deux, en sorte que la partie discontinue de la veine ne présentera que deux jets.

On admettra également que les sons plus rapprochés de l'octave grave feront prévaloir le mode relatif à cette dernière, et qu'ainsi la gerbe ne se changera jamais qu'en deux jets.

Enfin l'on admettra encore que, pour des sons qui ne s'éloignent pas trop de la double octave grave, les vibrations ont toujours assez d'amplitude, et, par suite, assez d'action, pour surmonter les forces figuratrices ordinaires, et qu'en même temps les divisions qu'elles font naître sont toujours assez longues pour que chacune d'elles doive nécessairement subir ensuite un fractionnement, lequel la partage au plus en trois, et pourra aussi ne la partager qu'en deux, s'il éprouve de la part des vibrations une plus grande résistance; d'où trois jets ou deux jets.

Quant aux systèmes de ventres et de nœuds qui s'observent dans chacun des jets, ils sont la conséquence évidente des vitesses transversales acquises qui proviennent de l'action des vibrations.

§ 473. On peut se demander pourquoi, au-dessus du son principal et entre celui-ci et son octave grave, aucun son, à l'exception de ceux qui avoisinaient ces deux derniers, n'a occasionné, dans les expériences décrites au § 471, rien d'analogue aux phénomèmes que nous venons d'étudier; en effet, pour la simple quinte grave du son principal, par exemple, on trouvera facilement que la longueur occupée par l'ensemble de deux des divisions dues aux vibrations seules serait égale à celle qu'occupe l'ensemble de trois divisions dues aux forces figuratrices, en sorte qu'en imaginant ces deux ensembles superposés et se combinant, il y aurait concours dans les deux étranglements dont les terminaisons du système feraient partie, et lutte dans les deux étranglements intermédiaires appartenant au second des deux ensembles considérés; et, comme ces deux luttes seraient égales, on pouvait s'attendre, d'après notre théorie, à voir la gerbe faire place à trois jets ; enfin on pouvait s'attendre également, par des raisons analogues, à la manifestation de trois jets sous l'influence de la quarte aiguë, et de deux jets sous celle de la quinte aiguë du son principal.

Mais, dans notre théorie, l'apparition d'un, de deux ou de trois jets au lieu de la gerbe, suppose, comme on l'a vu, que les vibrations communiquées au liquide régularisent ce qui se passe dans la veine, et cela exige qu'elles aient une énergie d'action capable de neutraliser l'effet des causes perturbatrices qui tendent à établir, dans les étranglements naissants succcessifs, des inégalités de longueur non symétriquement distribuées; or, toutes choses égales d'ailleurs, l'action des vibrations sur la veine décroissant avec l'amplitude de ces vibrations, on comprend qu'au-dessus de l'octave grave du son principal cette action a pu être simplement insuffisante, et s'il eût été possible d'augmenter, par une transmission plus immédiate ou par une meilleure disposition du système de l'orifice, l'amplitude des vibrations communiquées, les trois sons signalés plus haut auraient sans doute cessé de se montrer inactifs à l'égard de la gerbe. C'est ce qui deviendra évident, si l'on fait attention que les vibrations agissent sur les veines lancées obliquement de la même manière que sur les veines lancées verticalement de haut en bas, et si l'on se rappelle que, dans les expériences de Savart mentionnées dans le n° 14 du § 448, expériences dans lesquelles tout était disposé de façon à donner une grande intensité aux vibrations communiquées, le mode de transformation imprimé par celles-ci se substituait complétement à celui des forces figuratrices, même pour des sons allant jusqu'à la quinte aiguë du son principal.

Nous avons parlé de l'influence possible d'un changement au système de l'orifice; c'est qu'en effet l'orifice employé dans mes expériences était percé dans une plaque très-mince [1], et que, par suite, cette plaque vibrait peut-être difficilement à l'unisson de sons qui n'avaient pas une certaine gravité.

§ 474. Nous n'avons plus maintenant, pour achever l'étude de l'influence exercée sur les veines liquides par les mouvements vibratoires, qu'à montrer la liaison de la théorie avec les faits du n° 17 du § 448, et cette liaison paraît moins facile à établir :

Puisque le son principal est aussi celui pour lequel la durée d'une vibration est égale à celle du passage d'un

(1) Elle n'avait qu'environ un demi-millimètre d'épaisseur.

étranglement ou d'un renflement à la section contractée, et puisque, d'après l'expérience de Savart, le nombre de vibrations correspondant à ce son diminue à mesure que la direction suivant laquelle le jet est lancé s'écarte de la verticale descendante, il doit en être de même du nombre d'étranglements et de renflements naissants, et, par suite, du nombre de divisions naissantes; mais comme la vitesse de sortie du liquide est sensiblement indépendante de la direction de cette sortie, le nombre des divisions qui naissent en un temps donné ne peut décroître notablement que par une augmentation dans la longueur de ces divisions naissantes; ainsi, sous une même charge et avec un même orifice, les divisions naissantes doivent aller en s'allongeant à mesure que la direction d'émission de la veine s'éloigne davantage de la verticale descendante.

Nous avons vu (§ 454) que, sous une charge faible, la longueur des divisions naissantes d'une veine lancée verticalement de haut en bas est diminuée par la tendance de cette veine à l'effilement; elle doit donc, par la raison contraire, être augmentée dans une veine lancée verticalement, de bas en haut, et conséquemment, toujours sous une charge faible, elle doit aller graduellement en croissant de la première de ces directions à la seconde. Mais, dans l'expérience que rapporte Savart, l'orifice était de 3 millimètres, et la charge de 50 centimètres; cette charge doit être regardée comme forte, et, sous son action, le changement de longueur des divisions naissantes dû à la cause ci-dessus devait être insensible; or, dans cette même expérience, de la direction verticale descendante à une direction montante sous l'angle de 45°, le nombre de vibrations correspondant au son principal a paru s'abaisser de 600 à 355, c'est-à-dire devenir près de deux fois moindre. Il faut donc que, de l'une de ces directions à l'autre, la longueur des divisions ait presque doublé; ainsi la cause que j'ai rappelée est complétement insuffisante.

Disons ici que Savart ne parle qu'avec beaucoup de réserve du fait dont il s'agit; voici comment il s'exprime : « Toutefois je ne puis rien préciser à ce sujet, parce que, quand le jet est lancé de bas en haut, seulement sous un angle de 45° (la charge étant de 50 centimètres et l'orifice de 3 millimètres de diamètre), le choc de la partie trouble contre une membrane est déjà trop faible pour la mettre en vibration, de sorte qu'il ne reste plus, pour déterminer le nombre des pulsations, qu'à rechercher avec un instrument à cordes quel est le son qui modifie le plus fortement la forme et les dimensions de la veine, moyen qui étant sans contrôle, ne peut plus inspirer une entière confiance. »

Il est permis, on le voit, de concevoir quelques doutes à l'égard du phénomène; cependant, admettons-le dans toute sa plénitude, et essayons de découvrir une raison plausible au grand allongement des divisions.

Notre étude des cylindres liquides nous a révélé une cause capable de produire un semblable effet : c'est la présence de résistances qui gênent la transformation; voyons donc si, dans les conditions du phénomène, nous pourrons trouver l'origine d'une résistance de cette nature.

Remarquons d'abord que, dans la transformation spontanée des cylindres, et, par suite, dans celle des veines, les renflements n'ont, par eux-mêmes, aucune tendance à se former : ils ne se développent que parce que le liquide y est chassé par l'excès de pression capillaire des étranglements; ils sont purement passifs, les étranglements seuls sont actifs : Maintenant, si une veine lancée dans une direction descendante soit verticale, soit oblique, ne se divisait pas, elle s'effilerait graduellement dans son trajet, nous le savons, par l'accélération due à la pesanteur, de sorte que les molécules, en même temps qu'elles se mouvraient dans le sens de l'axe, iraient en se rapprochant progressivement de celui-ci. Par conséquent, dans une veine descendante, les étranglements qui tendent à se former, ne rencontrent point de tendance opposée; on comprend, en outre, qu'ils se formeront d'autant plus aisément que la veine sera plus près d'être verticale.

Mais il n'en est plus de même pour des directions montantes: ici la veine, abstraction faite de ses divisions, s'élargit à partir de la section contractée; en d'autres termes, les molécules, en même temps qu'elles obéissent au mouvement général de translation, tendent partout à s'éloigner de l'axe; or n'est-il pas rationnel d'admettre que de là naît une résistance à la génération des étranglements, génération qui s'opère par un mouvement en sens contraire? et cette résistance sera nécessairement d'autant plus énergique que la direction d'émission de la veine se rapprochera davantage de la verticale ascendante. On ne peut objecter qu'avec la charge et l'orifice employés par Savart, les molécules tendent à s'éloigner très-peu de l'axe; car, lorsque la transformation commence, les forces capillaires qui la produisent sont extrêmement faibles, et, dès lors, on conçoit que le mouvement transversal ci-dessus des molécules doit suffire malgré sa petitesse, pour gêner la production normale des étranglements, et pour forcer ainsi la veine à allonger ses divisions. Enfin l'opposition dont il s'agit n'ayant lieu qu'à l'égard des veines montantes, c'est seulement dans ces dernières que l'allongement sera considérable, ce qui est d'accord avec le résultat de Savart.

Ajoutons que notre explication pourra être soumise jusqu'à un certain point au contrôle de l'expérience; en effet, si elle est fondée, il faut évidemment que, pour un même orifice, le phénomène observé par Savart soit d'autant moins prononcé que la charge est plus forte.

CHAPITRE XII.

Historique de la constitution des veines liquides. — Action de l'électricité sur des veines de petit diamètre. — Veines laminaires. — Constitution d'un courant gazeux qui traverse un liquide.

§ 475. Fidèle à la marche que nous avons suivie jusqu'ici, nous allons maintenant tracer une esquisse des recherches faites par les autres physiciens avant 1870, du moins de celles que nous avons pu recueillir, sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires.

Déjà en 1686, Mariotte[1] avait entrevu, au moins dans un cas particulier, la résolution spontanée de la veine en masses isolées. Après avoir avancé que les jets lancés verticalement de bas en haut vont en s'élargissant par suite de la diminution progressive de la vitesse, il

(1) *Traité du mouvement des eaux*, 4me *partie*, 1r *discours* (Œuvres de Mariotte, La Haye, édition de 1740, p. 448).

ajoute, à propos des veines verticalement descendantes :

« Par la même raison l'eau qui s'écoule par un trou de 5 ou 6 lignes, lorsqu'elle n'est dans le réservoir qu'à la hauteur de 3 ou 4 pouces, va toujours en s'étrécissant jusques à se réduire en gouttes quand le filet d'eau est devenu trop petit..... d'où l'on voit que le filet de l'eau deviendrait à la fin plus délié qu'un cheveu ; mais avant que d'en venir jusqu'à ce point, elle se sépare et se divise en gouttes qui accélèrent toujours leur mouvement jusques à ce qu'elles aient acquis leur plus grande vitesse. »

Quant au fait général de l'aspect trouble que présente, sous des charges quelconques, la seconde partie de la veine, on l'attribuait, avant Savart, à un simple éparpillement produit par la résistance de l'air(1).

Savart a montré que cette résistance n'est nullement la cause du phénomène ; à l'aide de procédés ingénieux, il a étudié la véritable constitution de la veine, et en a fait connaître toutes les particularités telles que nous les avons rappelées dans le chapitre précédent.

Dans les circonstances ordinaires, c'est-à-dire lorsque la partie trouble est reçue dans un vase où le liquide s'accumule librement, Savart constate d'abord, par des moyens fort simples, la discontinuité de la portion qui s'étend au delà du milieu du premier ventre : quand, après avoir porté les yeux sur un point de la veine voisin de l'orifice, on les fait mouvoir rapidement de manière à suivre le mouvement de translation du liquide, on distingue très-bien les masses isolées ; une baguette qu'on fait passer rapidement à travers la partie trouble plus bas que le milieu du premier ventre, n'est presque

(1) Voir Cavallo, *The elements of natural or experimental philosophy*, Londres, 1803, vol. II, p. 191 ; Biot, *Précis élémentaire de physique expérimentale*, t. I, chap. XIII, p. 116 de l'édition de 1824 ; etc.

jamais mouillée; enfin si le liquide est du mercure, cette portion de la veine est transparente, et les objets les plus déliés se voient parfaitement au travers.

Pour découvrir la cause des ventres et des nœuds, Savart dispose un appareil produisant un écoulement goutte à goutte; il voit cet écoulement donner lieu à l'apparence de ventres et de nœuds très-réguliers, et, en observant la manière dont les gouttes se détachent, il reconnaît qu'elle a lieu par un effilement, après la rupture duquel les gouttes s'aplatissent dans le sens vertical.

Revenant ensuite à la veine résultant d'un écoulement continu, il parvient à montrer aux yeux ce qui se passe en réalité dans la moitié supérieure du premier ventre. Pour cela, il fait usage d'un procédé fondé sur la persistance des impressions dans l'œil : un large ruban noir traversé de bandes blanches équidistantes se meut de bas en haut, avec une vitesse uniforme et convenable, derrière une veine d'eau rendue foncée par une matière colorante. L'observateur placé devant ce système, voit la veine se projeter sur le fond grisâtre dû au passage rapide des bandes blanches, et, par des raisons trop longues à développer ici, distingue les masses isolées sous la forme de taches sombres occupant des positions fixes, ainsi que les renflements qui garnissent le bas de la partie continue.

Enfin, pour constater l'existence des renflements en des points plus rapprochés de l'orifice, Savart fait tomber sur la portion limpide de la veine une tranche mince et horizontale de lumière; la petite zone ainsi éclairée paraît alternativement monter et descendre, et ces oscillations, qui commencent à se montrer à peu de distance de l'orifice, acquièrent d'autant plus d'amplitude que la zone éclairée est plus rapprochée de la partie trouble.

Nous avons résumé, dans le § 448, les résultats des observations de Savart concernant l'action exercée sur la veine par les mouvements vibratoires, et, dans le § 447, nous avons donné une idée de l'hypothèse émise par le même savant pour rendre raison de la constitution de la veine.

§ 476. Dans un Mémoire dont il sera question au § 486, M. Fuchs rapporte une observation curieuse faite, dit-il, par hasard à Eperies en Hongrie, une vingtaine d'années avant son travail, ce qui correspond à l'année 1836 environ : on effectuait des expériences avec un électrophore, pendant qu'un petit jet d'eau jaillissait d'une fontaine de Héron, placée dans le voisinage; or on remarqua que ce jet, qui naturellement se séparait en gouttelettes avant d'atteindre son sommet, devenait continu dans toute sa longueur sous l'influence à distance du plateau de l'électrophore.

On connaissait, du reste, depuis longtemps l'expérience de l'arrosoir électrique : on savait que si de l'eau s'écoule de haut en bas par un orifice assez étroit pour qu'elle ne sorte que goutte à goutte, l'écoulement devient continu lorsqu'on communique directement au vase une électricité modérée.

§ 476bis. Mentionnons ici la curieuse expérience que M. Colladon a décrite[1] en 1842, et qui consiste à faire pénétrer dans une veine courbe d'eau un faisceau de lumière solaire suivant la direction d'émission du jet. L'orifice d'écoulement est percé dans la paroi latérale du réservoir, et une ouverture pratiquée dans la paroi

(1) *Sur les réflexions d'un rayon de lumière à l'intérieur d'une veine liquide parabolique* (COMPTES RENDUS, t. XV, p. 800).

opposée, vis-à-vis de l'orifice, est munie d'une lentille convexe dont le foyer coïncide avec cet orifice quand le réservoir contient l'eau; la lumière du soleil réfléchie horizontalement par un miroir sur la lentille, forme ainsi un faisceau conique allongé qui traverse l'eau du réservoir et s'introduit par l'orifice dans la veine; or les rayons dont il se compose frappent partout la surface intérieure de la veine sous des angles assez grands pour qu'ils éprouvent la réflexion totale, de sorte que la lumière reste emprisonnée dans toute la partie continue du jet, malgré la courbure de celui-ci. Mais si cette partie continue est reçue sur un obstacle solide, la lumière est mise en liberté et manifeste son éclat à l'endroit de la rencontre; de même, si la veine est suffisamment longue pour que sa portion inférieure se réduise en masses isolées, la lumière se fait jour vers le bas de la partie continue, et de là s'échappent de vives lueurs.

§ 476ter. En 1844, M. von Feilitzch a publié, sur l'écoulement des liquides par de petites ouvertures, un Mémoire(1) où il s'occupe surtout de la contraction de la veine, de la vitesse initiale, et de l'influence des ajutages, mais où il présente quelques considérations sur la génération des masses isolées. Il attribue la formation des renflements vers le bas de la partie continue à une sorte de lutte entre la tendance de la veine à constituer un conoïde allongé et une tendance à la conversion en gouttes: selon lui, la séparation s'effectue, et une goutte se détache, là où la section du conoïde continu placée entre deux renflements est la plus petite possible.

On voit que M. Von Feilitzch a approché plus ou moins

(1) *Ueber den Ausfluss der Flüssigkeiten aus Oeffnungen in dünner Wand und aus kurzen Ansatzröhren* (ANN. DE M. POGGENDORFF, vol. LXIII, pp. 1 et 215).

de ma théorie, puisqu'il admet dans la veine une tendance spontanée à la transformation en masses isolées.

§ 477. L'appareil à bandes blanches parallèles imaginé par Savart altère, pour l'œil de l'observateur, les dimensions verticales des renflements et des masses isolées, et ne peut montrer ces renflements et ces masses avec une grande netteté. En 1846, Matteucci(1) a eu l'idée d'observer la veine en l'éclairant par une forte étincelle électrique, ou mieux par une suite de semblables étincelles; il a vu ainsi, d'une manière parfaitement distincte, les masses isolées dans les différentes phases de leurs oscillations de forme. Il pense qu'on pourrait, en disposant convenablement l'appareil, projeter l'image de la veine sur un écran au moyen d'une lanterne magique toujours en se servant des étincelles comme source de lumière.

§ 477bis. En 1848, M. Weisbach(2) a pu étudier, dans une mine près de Freiberg, des veines d'eau lancées horizontalement sous une charge de 122 mètres. Je n'ai pas à m'occuper des résultats qu'il a obtenus avec des ajutages, ou avec un orifice carré; mais l'une de ces veines sortait d'un orifice circulaire, sans ajutage; or elle présentait cette particularité remarquable, qu'elle n'était continue que jusqu'à une petite distance; l'orifice avait environ un centimètre de diamètre, et la veine était déjà discontinue à deux décimètres de cet orifice.

D'après les lois de Savart, la partie continue d'une veine lancée dans ces conditions aurait dû avoir, en l'absence de toute cause perturbatrice, environ 40 mètres

(1) *Examen de la constitution de la partie trouble de la veine liquide* (Comptes rendus, t. XXII, p. 260).

(2) *Ueber den Ausfluss des Wassers unter sehr hohem Drucke* (Polytechnisches Centralblatt, 14me année, p. 763).

de longueur; pour qu'elle se réduisît à deux décimètres, il fallait donc que la veine fût soumise à l'action d'une cause perturbatrice très-puissante; or on comprend que, sous une charge aussi énorme, le frottement de l'eau contre le bord de l'orifice devait être extrêmement intense, et produire conséquemment, dans ce bord, des vibrations énergiques; ce sont sans doute ces vibrations qui déterminaient le raccourcissement en question. Savart, il est vrai, a montré que le frottement au bord de l'orifice n'influait pas sur la constitution des veines qu'il observait; mais, dans ses expériences, la plus forte charge n'était en général que de 47 centimètres. Pour ne rien omettre, ajoutons que, dans le but de confirmer l'une de ses lois, Savart a mesuré les longueurs des parties continues de veines lancées, par un orifice de 3^{mm} de diamètre, sous des charges allant de 51 à 459 centimètres; cette dernière était déjà très-forte par rapport à l'orifice employé, et cependant la partie continue de la veine correspondante ne présentait pas de raccourcissement anormal, mais toutes les veines en question étaient reçues sur un corps sonore, et l'influence des vibrations de celui-ci masquait peut-être celle des vibrations du bord de l'orifice.

§ 478. Dans le Mémoire dont j'ai analysé une partie au § 153, Mémoire publié en 1849, M. Hagen s'occupe aussi de la veine liquide. Supposant une veine qui s'écoule verticalement de haut en bas, il considère deux tranches minces, ou sections transversales, peu éloignées l'une de l'autre à leur départ, tranches dont la distance mutuelle va en croissant à mesure qu'elles descendent; il démontre que la surface de la portion de la veine comprise entre elles va également en croissant, mais que l'accroissement devient d'autant moins rapide que la portion dont il s'agit a parcouru plus de chemin. Il conclut de là que les molécules de l'intérieur de la veine qui doivent se rendre à la surface pour satisfaire à l'augmentation progressive de celle-ci, le font de plus en plus facilement à mesure que la portion envisagée poursuit sa route, et qu'ainsi on ne peut attribuer la séparation des masses à ce que les molécules en question n'ont pas le temps d'arriver à la surface; il fait remarquer, en outre, que la résolution en masses isolées s'opère dans une veine lancée de bas en haut comme dans une veine lancée de haut en bas, bien que, dans la première, les sections transversales aillent en se rapprochant, au lieu d'aller en s'écartant.

Il emploie, pour l'observation des renflements de la partie continue, un procédé consistant à recevoir cette partie sur une plaque de verre, et à regarder de l'autre côté de celle-ci; l'expérience est surtout commode dans le cas d'une veine jaillissant de bas en haut et dont la partie continue vient frapper la concavité d'un verre de montre. M. Hagen ne dit pas d'une manière bien nette comment ce genre d'expérience rend manifeste l'existence des renflements; il ajoute qu'il n'a jamais pu poursuivre ces renflements jusqu'à l'orifice.

Il fait usage d'un autre procédé encore, applicable aussi à la partie discontinue : il reçoit, pendant un temps très-court, une veine formée d'eau colorée sur un cylindre horizontal en carton recouvert de papier absorbant, et tournant avec une vitesse convenable qu'on peut évaluer.

Si c'est la partie discontinue qui l'a frappé, le cylindre porte l'empreinte de chacune des masses isolées, et l'on peut ainsi déterminer le nombre de ces masses qui se détachent dans un temps donné, leurs grosseurs relatives, et les distances qui les séparent. Si c'est la portion limpide, le cylindre présente l'empreinte d'une traînée où l'on ne distingue aucun renflement, d'où M. Hagen conclut que la formation des gouttes ne commence nullement à l'orifice, mais seulement au point de la veine où celle-ci perd l'aspect massif. Je n'ai pas besoin de faire remarquer que ce procédé est trop peu délicat pour qu'on puisse en tirer une semblable déduction; d'ailleurs la rencontre de la portion limpide et du cylindre tournant ne peut évidemment faire naître des vibrations notables, de sorte que la veine se trouve à peu près soustraite à toute influence étrangère; or, dans ce cas, comme je l'ai déjà exposé (§ 432), les renflements et les étranglements ne peuvent devenir perceptibles qu'à une assez grande distance de l'orifice.

Dans les veines que M. Hagen a soumises à ses observations, les masses composant la partie discontinue n'étaient pas très-différentes en diamètre, et ne montraient sous ce rapport aucune régularité. La succession alternative régulière de deux diamètres inégaux ne s'est présentée que dans une seule circonstance, et ces deux diamètres étaient entre eux environ comme 4 à 3. J'ai donné, dans le § 431, la raison pour laquelle, dans les veines descendantes, les masses résultant de la transformation des filets ne sont pas, en général, de petites sphérules.

M. Hagen a essayé inutilement de vérifier la proportionnalité de la longueur de la partie continue à la racine carrée de la charge : il a fait plusieurs séries d'observations avec des orifices de différents diamètres, et en a représenté graphiquement les résultats, en prenant pour abscisses les charges successives, et, pour ordonnées, les longueurs correspondantes de la partie continue; il a toujours trouvé, même avec des orifices d'environ 3^{mm}, que la ligne obtenue de cette manière au lieu d'appartenir à une parabole passant par l'origine, était sensiblement une droite dont le prolongement coupait l'axe des ordonnées à une certaine hauteur au-dessus de l'origine. On a vu (§§ 440 et 441) avec quelle netteté la loi de la proportionnalité à la racine carrée de la charge, loi que nous savons être liée à la théorie, s'est manifestée dans les observations de Savart avec un orifice de 3^{mm}, même à partir de la faible charge de 4,5 centimètres ; je ne puis soupçonner la cause du désaccord ci-dessus.

Enfin M. Hagen, bien qu'il ne pût connaître ma théorie, celle-ci ayant paru dans la même année, arrive à la conclusion que la tension de la surface de la veine paraît exercer une grande influence sur la résolution en masses isolées.

§ 479. En 1851, M. Billet-Sélis(1) a indiqué deux nouveaux procédés pour l'observation de la veine. Le premier consiste à regarder la veine à travers mon disque tournant percé d'une fente radiale; ce procédé lui a montré nettement les masses principales et les intermédiaires, et enfin les renflements qui, glissant le long de la partie limpide, préparent l'avénement des masses isolées; l'auteur le fait servir ensuite à rendre visibles les mêmes détails dans l'image de la veine projetée sur un écran au moyen d'une lentille.

Le second procédé est une modification ingénieuse de celui du ruban rayé de Savart : la veine s'écoule verticalement de haut en bas devant un grand miroir concave, en passant par le centre de courbure de celui-ci; l'image réelle de cette veine occupe donc alors le même

(1) *Sur les moyens d'observer la constitution des veines liquides* (ANN. DE CHIM. ET DE PHYS. DE PARIS, 3me série, t. XXXI, p. 326).

lieu que cette veine, et le mouvement s'y produit avec une égale vitesse, mais en sens contraire.

En disposant les choses de manière que la coïncidence ait lieu, pour l'œil placé en avant du système, entre la partie discontinue bien éclairée et son image, on voit distinctement les masses séparées et immobiles.

La Note de M. Billet-Sélis commence ainsi :

« Au moment où l'ingénieux Mémoire que M. Plateau vient de publier ajoute à l'intérêt qu'ont toujours inspiré les belles recherches de Savart sur l'écoulement des liquides,...... »

On verra plus loin (§ 493) pourquoi je cite ce passage.

§ 480. En 1851 également, M. Tyndall a publié (1) une Note concernant surtout un phénomène déjà étudié par Magnus, savoir l'introduction de bulles d'air sous la surface du liquide dans lequel une veine tombe. Ce phénomène ne se rapporte qu'indirectement à notre sujet; cependant je signalerai ici le procédé ingénieux qu'emploie M. Tyndall pour démêler ce qui se passe à l'endroit où la veine atteint la surface de l'eau : ce liquide est contenu dans un bassin blanc, il est vivement éclairé par une lampe munie d'une mèche plate dont le plan prolongé passe par la veine ; les ombres des bulles d'air, quand ces bulles se produisent, et l'ombre de la portion plus ou moins déformée de la surface du liquide au lieu où la veine pénètre, se dessinent nettement sur le fond du bassin.

Pour manifester la continuité de la portion supérieure de la veine et la discontinuité de la portion inférieure, M. Tyndall place derrière la veine, dans l'obscurité, un mince fil de platine horizontal, maintenu au rouge blanc

(1) *Phenomena of a Water-Jet* (PHILOS. MAGAZ., 4me série, vol. I, p. 105).

par un courant électrique; quand ce fil est derrière la partie limpide, il paraît interrompu par un intervalle obscur, mais s'il est derrière la partie trouble, on le voit briller dans toute sa longueur. M. Tyndall emploie aussi l'étincelle électrique, mais il ne donne aucun détail sur la disposition de l'expérience, et se borne à dire que cet éclairement instantané réduit la partie trouble en une file de globules transparents. Il croit que le son produit par la chute de la partie trouble de la veine dans l'eau qui la reçoit, a sa cause principale dans les petites explosions successives des bulles d'air qui viennent crever à la surface.

Disons, en outre, qu'au commencement de sa Note, M. Tyndall énonce une opinion singulière : selon lui, les masses isolées dans lesquelles se résout la partie inférieure d'une veine d'eau, s'atténuent de plus en plus (probablement en se subdivisant) pendant leur descente, et si la veine tombait d'une hauteur suffisante, il n'y aurait plus, en bas, qu'une sorte de poussière liquide ; il cite la cascade du Staubbach, en Suisse, comme fournissant, sur une grande échelle, un exemple de ce phénomène.

§ 481. En 1851 encore, M. Buff a exposé[1] une suite d'observations sur la résolution de la veine en masses isolées. Il a répété l'expérience de l'éclairement par l'étincelle électrique, en employant un appareil d'induction muni d'un interrupteur dont il pouvait graduer la vitesse à volonté. Il observait l'ombre que la veine ainsi éclairée projetait sur un écran blanc, et cette ombre était parfaitement nette. C'est de cette manière, en effet,

(1) *Einige Bemerkungen ueber die Erscheinung der Auflösung des flüssigen Strahls in Tropfen* (ANN. DE CHIM. ET DE PHARMAC. DE MM. LIEBIG, WÖHLER ET KOPP, vol. LXXVIII, p. 162).

que l'expérience doit se faire; Magnus, qui, ainsi qu'on le verra (§ 487), a eu recours également à l'étincelle électrique, mais qui regardait la veine elle-même, n'a pu distinguer les formes des masses isolées, parce que, comme il le dit, chacune de ces masses n'est guère visible que par un point brillant; Matteucci, qui a le premier fait usage de l'étincelle (§ 477), n'indique pas comment il observait.

Le spectacle le plus surprenant, dit M. Buff en parlant de l'emploi de son procédé, est offert par une veine jaillissant obliquement de bas en haut: l'ombre produit alors l'impression d'une tige solide, qui, de son extrémité supérieure renflée, lance des sphères d'autant plus nombreuses que les étincelles se succèdent plus rapidement.

M. Buff a eu l'idée de recevoir dans de l'huile, à une distance convenable de l'orifice la partie continue d'une veine d'eau s'écoulant sous une charge très-faible; l'huile ralentit encore beaucoup la vitesse de translation, déjà peu considérable, et, de cette façon aussi, on distingue les masses isolées successives. M. Buff conclut des résultats de ce procédé, que, sous de faibles charges, presque toutes les gouttes sont de même grandeur et se succèdent à des intervalles égaux.

M. Buff connaît ma théorie, et, pour la soumettre à une épreuve expérimentale, il reçoit, dans un verre plein d'eau, une veine du même liquide s'écoulant verticalement de haut en bas; il soulève ce verre jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de bulles d'air entraînées, et constate qu'alors la veine s'écoule tranquillement, sans faire entendre aucun bruit; de plus, en observant l'ombre projetée par l'éclairement électrique, il trouve que, dans les conditions normales, le diamètre de la partie continue n'éprouve pas de variations périodiques jusque près de son extrémité. Il conclut de tout cela que la production des masses isolées ne peut dépendre de la rupture d'équilibre de la figure cylindrique, rupture dont les résultats devraient prendre leur origine à l'orifice même, et aller en se prononçant de plus en plus jusqu'à l'extrémité de la partie continue.

Mais d'abord, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer, la vitesse avec laquelle s'effectue la transformation commençant par être excessivement minime, ce n'est qu'à une distance assez grande de l'orifice que le phénomène se prononce suffisamment pour produire des effets sensibles, tels qu'un bruit quand on reçoit la veine dans l'eau. En second lieu, la cessation de l'entrée des bulles d'air n'indique nullement qu'on se trouve à l'extrémité de la partie continue, elle indique seulement qu'en soulevant le verre, on a atteint un point où les renflements et les étranglements sont trop peu accusés. En troisième lieu, il suit des raisons ci-dessus rappelées, que, dans l'ombre de la veine on ne pourrait distinguer les renflements et les étranglements de la partie continue qu'au-dessous du point où cette partie observée directement à l'œil nu semble commencer à s'élargir ; on a vu, en effet, que, même dans le cas où la veine n'est pas soustraite aux petites actions étrangères, Savart n'a pu manifester l'existence des renflements et étranglements jusque près de l'orifice, qu'à l'aide du procédé très-délicat de la mince tranche de lumière. Enfin, quant aux renflements et étranglements plus développés au bas de la partie continue, M. Buff ne dit pas qu'il ait réglé son appareil électrique de manière que la période de succession des étincelles coïncidât, ou à peu près, avec celle de l'émission des masses ; or si cette coïncidence approchée n'avait pas lieu, les ombres de ces renflements et étranglements devaient se projeter à des hauteurs différentes, et dès lors, par leur non-superposition, devaient simplement produire l'apparence d'un élargissement de cette portion de la veine; c'est, d'ailleurs, ce que semble indiquer la description donnée par M. Buff de l'aspect de l'ombre dans le cas d'une veine lancée obliquement de bas en haut. Nous savons, du reste, que la présence de ces mêmes renflements et étranglements du bas de la partie continue a été nettement constatée par Savart au moyen du ruban rayé, et par M. Billet-Sélis au moyen du disque tournant; enfin, ainsi qu'on le verra (§ 487), Magnus les a également observés dans les veines soustraites à toute influence vibratoire.

M. Buff croit que la séparation de chaque masse s'effectue absolument comme dans l'expérience de Savart sur un écoulement goutte à goutte : selon lui, quand, par suite de l'accélération du mouvement, le poids de la goutte qui se forme à l'extrémité inférieure de la veine devient suffisant pour vaincre la cohésion du liquide, cette goutte, d'abord précédée d'un effilement, se détache, puis l'action capillaire faisant rebrousser en arrière ce qui est devenu alors l'extrémité de la partie continue, y détermine un renflement qui se détache de même sous forme de goutte, et ainsi de suite. On est en droit de se demander comment M. Buff, qui a pris plaisir à observer l'émission des masses isolées dans le cas d'une veine ascendante, où le mouvement est retardé, peut énoncer une semblable opinion.

§ 482. En 1855, M. Dejean a présenté à l'Académie des sciences de Paris un Mémoire(1) qui, je pense, n'a pas été publié, et dont il donne un extrait; il y énonce,

(1) *Nouvelle théorie de l'écoulement des liquides* (COMPTES RENDUS, t. XL, p. 467).

mais d'une manière trop succincte pour qu'on puisse les bien comprendre, des idées singulières sur la nature des liquides, et indique comment il en fait l'application au phénomène de la contraction de la veine et au calcul de la dépense avec des orifices quelconques ; il explique, d'après les mêmes idées, mais toujours trop succinctement, les pulsations à l'orifice supposées par Savart, et avance qu'il parvient aux lois déduites de l'expérience à l'égard de ces pulsations, ou, ce qui revient au même, du nombre des vibrations correspondant au son propre à la veine. Enfin il ajoute qu'il rend raison de la formation des renflements qui se propagent le long de la partie limpide ; qu'il démontre comment cette partie se raccourcit sous l'influence d'un son produit dans son voisinage ; pourquoi la veine est d'autant plus sensible à cette influence que le liquide est plus compressible, et pourquoi cette sensibilité augmente avec le diamètre des orifices.

§ 483. En 1855 aussi, Magnus a fait paraître la première partie de ses *Recherches hydrauliques* (1). Ce travail renferme, outre les faits curieux que j'ai rappelés aux §§ 234 et 333, des observations sur les veines liquides s'écoulant verticalement de haut en bas. L'auteur avance d'abord que, quelque soin qu'on donne à la régularité de l'appareil d'écoulement, le liquide qu'il contient prend toujours, après un certain temps, un mouvement de rotation, d'où résulte que la veine finit par se courber en une sorte d'hélice allongée. Magnus évite cet inconvénient en déposant sur le fond du vase un système composé de quatre grandes plaques métalliques verticales formant entre elles des angles droits, toutes

(1) *Hydraulische Untersuchungen* (ANN. DE M. POGGENDORFF, vol. XCV, p. 1.

dirigées vers l'axe de l'orifice, mais n'atteignant pas cet orifice (1).

Il traite d'abord des veines lancées par des orifices non circulaires de figures diverses ; il décrit les aspects singuliers qu'elles présentent, et donne de ces phénomènes une théorie qui est évidemment la véritable. Je ne résumerai pas cette portion des recherches de Magnus ; elle est étrangère au sujet de mon travail, sauf le cas d'un orifice en forme de fente rectiligne, cas dont j'ai dit quelques mots au § 238.

Magnus commence ensuite l'étude des veines sortant d'orifices circulaires. Quand l'orifice a un diamètre suffisant, tel que 12^{mm}, et qu'on produit dans le voisinage de la veine un ébranlement subit, par exemple en frappant du pied le plancher, la veine se désunit près de l'orifice ; ce phénomène provient de ce que le vase est mis en vibration et que, par suite, le liquide prend, pour un instant, dans l'orifice, un mouvement opposé à celui qui le chasse au dehors.

Dans cette première partie, Magnus attribue la séparation des masses, lorsque toutes les influences étrangères sont écartées, à l'accélération de la vitesse de translation, d'où résulte un déchirement du liquide ; il ajoute que des vibrations communiquées au vase favorisent ce déchirement, en ce qu'alors il y a dans la veine des sections voisines pour l'une desquelles la vitesse de translation est accrue, tandis que pour l'autre elle est diminuée.

(1) Une discussion s'est établie, au sujet de ce mouvement gyratoire du liquide du vase, entre Magnus et M. Laroque ; de nombreuses expériences ont conduit ce dernier à la conclusion que le mouvement dont il s'agit existait inévitablement dans la masse liquide avant l'écoulement (Voir *Ann. de chim. et de phys. de Paris*, 3me série, 1861, t. LXI, p. 345, et 1863, t. LXVII, p. 484).

A la fin de son Mémoire, Magnus reprend l'étude de l'introduction des bulles d'air dans le liquide qui reçoit la veine, phénomène dont il s'était déjà occupé dans un autre travail; enfin il examine le cas où de l'air s'introduit dans la veine elle-même, et il décrit le fait suivant : quand le liquide du vase est animé d'un mouvement de rotation, sa surface se creuse en entonnoir, et, après quelque temps, l'extrémité inférieure de cette excavation pénètre dans la veine à travers l'orifice, du moins quand celui-ci n'est pas trop petit; la veine se trouve alors transformée, quelquefois sur une longueur de plusieurs pieds, en un tube liquide.

J'avais pensé d'abord que ce tube constituait une veine laminaire; mais, dans le Mémoire dont j'ai parlé au § 344, M. Laroque décrit le même phénomène et le représente en coupe par une figure, laquelle montre que le diamètre de l'espace creux intérieur, là où il est le plus large, c'est-à-dire près de l'orifice, n'est pas le tiers de celui de la veine; dans l'expérience de M. Laroque, la paroi du tube liquide devait avoir, en cet endroit, 3^{mm} d'épaisseur au minimum; elle ne peut donc être considérée comme une lame. Je reviendrai plus loin (§ 505) sur ce curieux phénomène.

Cette première partie des Recherches hydrauliques ne fait aucune allusion à ma théorie; mais Magnus a repris plus tard l'étude de la veine, ainsi que nous le verrons (§ 487).

§ 484. Dans une lettre (1) adressée à Magnus en 1856, M. Buff s'occupe aussi des veines lancées par des orifices de formes polygonales; mais il rapporte une expérience curieuse relative à des orifices circulaires : quand de l'eau s'écoule par deux orifices de cette espèce situés l'un

(1) Ann. de M. Poggendorff, vol. C, p. 168.

près de l'autre, les deux veines, au lieu de sortir normalement au plan de ces orifices, vont en se rapprochant, et peuvent même se rencontrer.

§ 485. Je dois mentionner ici le rapport fait par M. Maus, en 1856 également, à l'Académie de Belgique[1] sur ma 3^{me} série, dans laquelle j'applique ma théorie à l'action des mouvements vibratoires sur la veine. M. Maus énonce des doutes à l'égard de cette théorie; il s'exprime ainsi :

« J'ai peine à admettre avec M. Plateau que, dans un phénomène principalement produit par la gravité, cette force soit complétement écartée pour attribuer la configuration de la masse en mouvement exclusivement à la force moléculaire, fort inférieure à la gravité. »

« Mon hésitation s'est accrue lorsque j'ai remarqué que, pour justifier l'élimination de la gravité, M. Plateau considère cette force comme n'agissant sur la veine liquide qu'à partir de l'orifice d'écoulement, sans considérer son action sur le liquide contenu dans le vase, action qui, par la manière dont elle attire les molécules liquides vers l'orifice, exerce, sur la forme de la veine sortie du vase, un effet que les phénomènes connus sous la désignation de *contraction* et *inversion* de la veine ne permettent pas de révoquer en doute. »

Certes, c'est la gravité qui chasse le liquide et produit ainsi la veine; mais une fois le liquide animé de son mouvement de translation après son passage à la section contractée, les forces moléculaires, forces intérieures au système, peuvent évidemment, comme je l'ai déjà fait remarquer (§ 431), exercer librement leur action, qu'elles soient ou non moins énergiques que la gravité.

(1) *Bullet. de l'Acad. de Belgique*, t. XXIII, 1re partie, p. 4.

Je n'ai point eu à m'occuper de la contraction de la veine; je n'ai dû considérer l'action des forces moléculaires qu'à partir de la section transversale de la veine où finit la contraction, parce que c'est à partir de là seulement que la veine prend sa forme allongée.

Quant aux inversions qui se montrent dans les veines sortant d'orifices non circulaires, elles n'ont rien de commun avec les renflements et les étranglements qui préparent la séparation en masses isolées, puisque ceux-ci sont emportés par le mouvement de translation du liquide, tandis que les inversions conservent, dans la portion limpide de la veine, des positions fixes.

M. Maus préfère la théorie des pulsations à l'orifice; il essaie d'expliquer ces pulsations par des considérations différentes de celles de Savart, et qu'il me serait difficile de résumer avec clarté : concevant la veine prolongée au-dessus de l'orifice dans l'intérieur du liquide, il fait intervenir l'inertie de ce liquide ambiant entraîné dans l'écoulement, et la perte de force vive qu'éprouve la veine par cette communication de mouvement, et il cherche à montrer que le jeu de ces deux causes doit produire, dans la vitesse de sortie, des augmentations et des diminutions alternatives. Quant à la séparation en masses isolées, il l'attribue, comme Magnus dans le travail analysé plus haut, à un déchirement produit par l'accélération de la vitesse du liquide.

§ 486. En 1856 encore, M. Fuchs (1) a répété l'observation de l'influence de l'électricité sur un jet d'eau de petit diamètre (§ 476). Il a reconnu qu'avec un orifice assez étroit pour que, sous une charge de 26 pouces, le

(1) *Ueber das Verhalten eines feinen Springbrunnens innerhalb einer elektrischen Atmosphäre* (BULLET. DES TRAVAUX DE LA SOCIÉTÉ DES SC. NATUR. DE PRESBURG, t. I, p. 79).

jet s'élevât à peine à 12 pouces de hauteur, l'action d'un bâton de verre frotté amenait la continuité du jet, même à la distance de quatre à cinq pas. Il essaie d'expliquer le phénomène par la considération que les gouttelettes séparées, dès qu'elles sont soumises à une influence électrique émanant d'une grande distance, se tournent de manière à présenter les unes aux autres leurs parties chargées d'électricités contraires, et qu'alors elles se réunissent par l'attraction de ces électricités.

Plus tard dans la même année[1], il est revenu sur cette explication, et en a montré lui-même l'inexactitude : entre autres arguments, il fait remarquer que si l'explication dont il s'agit était vraie, il faudrait qu'on doublât l'effet en soumettant le jet à l'influence simultanée de deux corps chargés d'électricités contraires et placés de deux côtés opposés de ce jet, tandis que l'effet devrait être annulé si les deux corps étaient chargés de la même électricité; or il a trouvé que c'est précisément l'inverse qui a lieu.

Il constate que si, au moyen d'un petit écran, on intercepte l'action du corps électrisé sur l'orifice seul, la résolution en gouttes se reproduit, tandis que si l'action est interceptée sur la veine et non sur l'orifice, la continuité du jet se manifeste. Il fait observer que la continuité du jet s'établit aussi par une électrisation directe convenablement modérée.

Il attribue la résolution en gouttes à l'adhésion entre l'orifice et le liquide ; pour appuyer cette opinion, il emploie un orifice en laiton mouillé d'huile, et voit alors le petit jet abandonné à lui-même demeurer continu dans toute sa longueur. Il en conclut que l'influence électrique

(1) *Mém. de la Société des Sc. natur. de Presburg*, p. 37.

agit simplement en détruisant l'adhésion du liquide avec l'orifice; mais, d'autre part, il s'étonne qu'une action si faible puisse annuler cette adhésion, tandis qu'elle ne paraît pas affecter la cohésion des molécules dans l'eau, cohésion qui est cependant, selon lui, beaucoup plus faible encore; il trouve, en outre, que les phénomènes sont les mêmes avec un orifice en métal ou avec un orifice en verre, c'est-à-dire conducteur ou non-conducteur de l'électricité.

L'expérience, répétée par M. Logeman devant la Société provinciale d'Utrecht, a provoqué, entre les physiciens hollandais, une discussion(1), mais qui ne nous apprend rien d'important.

§ 487. En 1859, Magnus a donné la deuxième partie de ses Recherches hydrauliques(2). Il y continue ses observations sur les veines verticales descendantes sortant d'orifices circulaires; il répète les observations de Savart relatives à l'effet des sons, mais il constate que sous des charges très-faibles, telles que de deux ou trois centimètres, la veine est influencée par tous les sons produits dans son voisinage, à l'exception des sons très-aigus. Il montre, de plus, que l'action des sons sur la veine résulte surtout des vibrations du fond du vase; pour cela, il dispose les choses de la manière suivante: le fond est percé d'une ouverture assez large, d'où part un tube en caoutchouc mince descendant verticalement et fermé, à son extrémité inférieure, par une plaque métallique dans laquelle est pratiqué l'orifice; cette plaque est d'un diamètre beaucoup plus grand que celui du tube, et repose par son bord sur des coussins. Or, en employant ce système, qui

(1) *Verhouding van eene kleine fontein in een electrische atmospheer* (UTRECHT, ANTEEK. PROV. GENOOTS. 1858-59, p. 18).
(2) *Ann. de M. Poggendorff*, vol. CVI, page 1.

rend l'orifice indépendant des vibrations du fond du vase, Magnus a reconnu que les sons n'agissaient plus.

Pour faire voir que les ventres sont formés par des masses isolées qui passent rapidement, Magnus introduit à une petite profondeur dans un ventre, l'extrémité d'un fil métallique qu'il tient à la main, et ressent alors l'impression d'un mouvement énergique de vibration, tandis que lorsqu'il introduit l'extrémité du fil dans la partie limpide, il n'éprouve que le sentiment d'une pression uniforme; une flamme amenée près de cette partie limpide demeure tranquille, et se montre au contraire agitée quand on la maintient près d'un ventre. Magnus se sert, en outre, d'un miroir tournant; l'expérience se fait dans une chambre obscure; une portion de la veine est fortement éclairée, le miroir, placé à un mètre de distance, tourne autour d'un axe vertical, et l'on y observe l'image de la portion dont il s'agit. Si cette portion est un ventre, l'image se compose d'une série de lignes brillantes inclinées.

Enfin Magnus emploie encore l'étincelle électrique et mon disque tournant. Quand la veine est soustraite à toute action vibratoire, ce dernier procédé ne lui montre pas de renflements et d'étranglements dans la portion limpide; mais il lui fait reconnaître l'existence de semblables renflements et étranglements de plus en plus prononcés à partir du point où commence la portion trouble jusqu'à celui où les masses s'isolent. Il ajoute : « La résolution de la veine en masses isolées a donc lieu d'une manière tout a fait semblable à celle qu'a déjà décrite M. Plateau. »

Toujours au moyen du disque tournant, Magnus trouve que, même dans la veine ci-dessus, les masses isolées sont les unes aplaties et les autres allongées, mais qu'elles ne s'isolent pas toutes à la même distance de l'orifice, et ainsi ne passent pas toutes aux mêmes points dans leurs maxima d'aplatissement et d'allongement, de sorte qu'il ne peut en résulter l'apparence de ventres. Il constate, de plus, dans les grosseurs de ces masses, les mêmes irrégularités que M. Hagen (§ 478). Quand la veine sort d'un orifice d'un diamètre très-petit (moins d'un millimètre), et qu'elle est sous l'influence d'un son, Magnus voit les gouttes isolées se succéder par séries régulières d'un nombre déterminé, séries laissant entre elles des intervalles plus grands, et il dit que ces grands intervalles correspondent aux vibrations ascendantes du fond du vase. Enfin il s'arrange de manière à obtenir un écoulement par simples gouttes se succédant assez lentement, et alors il distingue la production des filets et leur conversion en sphérules.

Quand la veine est soustraite à toute influence vibratoire, et que Magnus en observe, à l'aide du miroir tournant, la portion limpide, il ne voit qu'un large espace lumineux; mais si la veine est sous l'influence d'un son, l'image présente une série de lignes brillantes obliques, ce qui montre alors l'existence de renflements et d'étranglements se propageant dans la portion de la veine située au-dessus du premier ventre.

En approchant de la portion limpide d'une veine un corps électrisé, Magnus la voit simplement déviée vers ce corps ; mais si la veine a des ventres réguliers, de manière qu'on distingue, dans l'axe de ces ventres, l'apparence d'une veine plus mince (n° 12 du § 448), et si le corps électrisé est approché du milieu de l'un d'eux, la veine mince est seule déviée, à cause de la moindre masse des gouttes qui la composent, et se montre isolée à l'extérieur des ventres.

Magnus s'occupe ensuite des veines ascendantes soit verticalement soit obliquement. Il constate d'abord, au moyen du disque tournant, que les choses se passent de la même manière que dans les veines verticalement descendantes; il remarque seulement que les renflements qu'on distingue vers l'extrémité de la partie continue sont alors plus rapprochés les uns des autres. Dans le cas des veines obliquement ascendantes, il attribue la formation de la gerbe à ce que le tube qui porte l'orifice exécute des vibrations normales à l'axe de la veine, vibrations qui se transmettent à celle-ci, et d'où résulte que les masses isolées successives quittent la partie continue suivant des directions un peu différentes; il affirme que, sous l'influence d'un son, on sent avec la main ces vibrations transversales du tube. Il regarde la séparation de la partie discontinue de la veine en deux ou en trois jets distincts comme due à la même cause, et il fait remarquer que ces effets ne peuvent nécessairement se produire que pour des rapports déterminés entre la période des vibrations transversales de l'orifice et celle de l'émission des masses isolées.

Enfin, lors de la séparation en deux jets, l'observation à travers le disque tournant lui fait reconnaître, dans les masses isolées, un arrangement tel que toutes les masses d'ordre impair décrivent l'une des deux trajectoires, et toutes les masses d'ordre pair l'autre trajectoire. Dans le cas de trois jets, il constate une disposition analogue.

Il présente, on le voit, une explication de ces phénomènes toute différente de la mienne; j'y reviendrai dans le § 495.

Magnus termine ce travail remarquable en étudiant l'action des sons sur les veines lancées par des orifices non circulaires.

§ 488. En 1860, M. Reitlinger[1] a étudié, comme M. Fuchs, le phénomène de l'action de l'électricité sur un jet d'eau de petit diamètre. Il parle d'abord d'expériences anciennes de Desaguliers, du P. Gordon et de Nollet relatives à l'attraction exercée sur un petit jet d'eau par un corps électrisé, aux variations que subit la dépense lorsque le jet est électrisé directement, et à l'éparpillement du jet, soit par une électrisation directe, soit par une influence électrique suffisamment forte ; nous n'avons pas à nous occuper ici de ces effets. L'auteur répète l'expérience de la continuité du jet amenée par une électrisation directe peu intense, et fait remarquer que cette expérience suffit pour montrer l'erreur de la première explication proposée par M. Fuchs, puisque ici il n'y a qu'une seule espèce d'électricité communiquée au jet, et qu'ainsi la polarité ne peut s'établir dans les gouttes qui se succèdent.

Il soumet à l'action de l'électricité soit directe, soit par influence, un petit jet formé d'un liquide non conducteur, l'essence de térébenthine, et trouve que cette action ne modifie pas la résolution en gouttes.

Il adopte la dernière explication de M. Fuchs sur la manière dont agit l'influence électrique à l'égard du petit jet d'eau, et il essaie de résoudre la difficulté soulevée par ce savant lui-même, en admettant que, sous l'action de l'électricité, se produit une faible électrolyse de l'eau, d'où résulte, entre le liquide et la paroi intérieure de l'orifice, la formation d'une couche gazeuse très-mince qui annule l'adhésion. Pour soumettre cette nouvelle hypothèse à l'épreuve de l'expérience, M. Reitlinger emploie le mercure, qui est à la fois conducteur de l'élec-

(1) *Ueber die Entwickelung der Electricität auf Springbrunnen* (BULLET. DE L'ACAD. DE VIENNE, t. XXXIX, p. 390).

tricité et indécomposable, et il affirme que, même en l'absence de toute action électrique, le jet est parfaitement continu jusqu'à son sommet ; il emploie un orifice amalgamé, et voit alors le jet se résoudre en gouttes comme dans le cas de l'eau ; il constate, en outre, que l'électrisation soit directe, soit par influence, ne rend pas ce dernier jet continu. Je reviendrai (§ 494) sur ces expériences[1].

§ 489. Nous avons, en 1866, des observations singulières du P. Lacouture[2] : une veine d'eau s'écoule verticalement de haut en bas par l'orifice d'un tube partant d'un vase de Mariotte, et les choses sont réglées de manière que l'écoulement ait lieu avec une très-faible vitesse ; l'orifice du tube a 7^{mm} de diamètre, et la veine est reçue sur un plan résistant placé à une distance de l'orifice qui peut varier de 17^{mm} à 25^{mm}. Dans ces conditions, la veine, quoique limpide et continue, présente une suite de renflements et d'étranglements nettement accusés et occupant des positions fixes. Pour une distance moindre, savoir de 8^{mm} environ, il arrive quelquefois que l'écoulement s'arrête tout à coup : « l'orifice », dit l'auteur, « se trouve alors comme fermé par une goutte qu'on est parvenu à isoler un moment, et dont la surface forme comme une membrane...... Le contact d'un corps, même très-délié, rompt la trame de ce réseau, et l'écoulement recommence. »

Ces curieux effets présentés par une veine animée d'une vitesse très-petite, paraissent ne pouvoir se rattacher à aucun principe connu.

(1) Voir l'article inscrit au § 508 sous le n° 17.

(2) *Les Mondes*, 2^me^ série, 1^re^ année, t. II, p. 73. Voir aussi (ibid.), pp. 237, 429, et tome suivant, p. 10, pour une petite discussion entre l'auteur et moi.

Déjà en 1819 Belli, dans le Mémoire dont il a été question au § 322[ter], avait signalé un fait plus ou moins analogue aux précédents. Ce fait consiste en ce que si l'on reçoit un filet d'eau, s'écoulant verticalement de haut en bas, dans une cuiller pleine du même liquide et tenue à un décimètre de l'orifice, on remarque, à la partie inférieure de la veine, des étranglements équidistants, très-rapprochés et immobiles. En élevant et abaissant successivement la cuiller, on voit s'élever et s'abaisser aussi les étranglements, lesquels en même temps augmentent et diminuent de longueur.

§ 490. En 1867, le *Philosophical Magazine* a donné(1) un extrait de l'ouvrage de M. Tyndall sur le son; l'auteur y parle de la veine liquide et de l'action qu'exercent sur elle les vibrations sonores, mais il ne fait guère connaître de résultats nouveaux; notons cependant une curieuse expérience : une veine d'eau étant lancée obliquement de bas en haut de manière que la partie discontinue forme une gerbe, M. Tyndall fait résonner dans le voisinage deux diapasons choisis de façon à exercer une action énergique sur la veine et à faire entendre quatre battements par seconde; il voit alors la gerbe s'annuler et se reproduire périodiquement, en synchronisme avec les battements. Ajoutons que M. Tyndall adopte l'hypothèse des pulsations, et attribue celles-ci au frottement du liquide contre le bord de l'orifice.

§ 491. En 1867 également, M. Rodwell(2), après avoir exposé des faits étrangers à notre sujet, s'occupe de la constitution des veines liquides descendantes, et adopte pleinement ma théorie. Il insiste sur la généra-

(1) *On the action of sonorous vibrations on gazeous and liquid jets* (PHILOS. MAGAZ., 4me série, vol. XXXIII, p. 375).

(2) *On some effects produced by a fluid in motion* (Ibid., p. 99).

tion des masses plus petites interposées entre les grosses dans la partie discontinue, et décrit une expérience propre à montrer d'une manière facile la production du filet et la transformation spontanée de celui-ci, lorsqu'une masse liquide se sépare en deux. Cette expérience consiste à introduire, dans un mélange d'eau et d'alcool ayant une densité très-peu supérieure à celle de l'huile, une masse de ce dernier liquide formant une sphère de trois à quatre centimètres de diamètre; puis, quand la sphère est montée à la surface et s'y est changée en une sorte d'hémisphère ayant sa base au niveau du liquide ambiant (§ 11), à chauffer celui-ci; la masse alors s'allonge de haut en bas en une figure à peu près cylindrique à base inférieure hémisphérique, après quoi elle s'étrangle vers son milieu, le filet apparaît, se convertit en sphérules, et la masse inférieure descend au fond du vase, tandis que la supérieure demeure adhérente à la surface du mélange alcoolique.

§ 492. Enfin, en 1869, M. Buff, dans un Mémoire [1] ayant surtout pour objet l'intensité du choc d'une veine liquide contre un obstacle, avance qu'une des causes qui diminuent la hauteur à laquelle parvient une veine jaillissant de bas en haut, est une pression capillaire qui s'exerce à l'extrémité de la partie continue chaque fois qu'une masse vient de s'en détacher. A l'appui de cette opinion, il dit avoir constaté, en observant l'ombre d'un semblable jet projetée par la lumière électrique (§ 481), que chaque fois qu'une masse s'isole, la partie continue éprouve un mouvement de recul.

Il ne dit pas que la veine de ses expériences fût sou-

(1) *Versuche ueber den Stoss des Wasserstrahls* (ANN. DE M. POGGENDORFF, vol. CXXXVII, p. 497).

mise à l'influence d'un son qui aurait régularisé le phénomène de l'émission des masses, et dès lors les masses devaient sans doute s'isoler successivement à des distances de l'orifice un peu inégales; c'est ce qui résulte, en effet, quant aux veines verticalement descendantes, des expériences de Savart et de Magnus; et ce que j'ai exposé (§ 469) sur les causes de la formation de la gerbe dans les veines obliquement montantes, rend très-probable que la même chose a lieu à l'égard de celles-ci; or, dans ces conditions, je me demande comment, au moyen de son éclairement électrique, M. Buff a pu reconnaître le recul dont il parle.

Du reste, nous savons qu'immédiatement avant la séparation d'une masse, celle qui la suit se trouvant encore entre deux filets, doit être plus ou moins allongée dans le sens de l'axe de la veine, et qu'à l'instant de la rupture du filet antérieur, elle s'aplatit pour se séparer ensuite à son tour ; cet aplatissement produit donc effectivement un petit recul de la portion antérieure de la masse en question. En outre, comme l'étranglement qui a donné naissance au filet antérieur était à chaque instant dans une phase un peu plus avancée que l'étranglement postérieur, il a dû envoyer son liquide dans la masse considérée un peu plus rapidement que cet étranglement postérieur; de là un petit recul de cette masse entière, ou plutôt une légère diminution de sa vitesse de translation. Mais tous ces effets de recul doivent être fort minimes, et d'ailleurs ils sont exactement compensés par des effets opposés qui se produisent ensuite à la partie postérieure de la même masse; ainsi, abstraction faite des irrégularités de l'émission des masses, celle dont nous nous occupons quittera la partie continue avec la vitesse de translation du liquide, et la hauteur à laquelle

elle parviendra, hauteur qui mesure celle du jet, ne pourra être nullement influencée par les reculs que j'ai mentionnés.

§ 493. On voit, par cet historique, combien de procédés ingénieux ont été imaginés pour étudier la constitution des veines liquides ; mais on voit en même temps à quelles hypothèses inadmissibles on a eu recours afin d'expliquer la résolution de la veine en masses isolées : celle des pulsations à l'orifice, même lorsque la veine est sous l'influence d'un son et qu'ainsi ces pulsations existent en réalité, est complétement insuffisante pour rendre raison du développement progressif des divisions, et elle l'est bien plus encore lorsque la veine est soustraite à toute action vibratoire ; quant à celle du déchirement occasionné par l'accélération de la vitesse de translation, elle est renversée par le fait que les veines ascendantes se résolvent en masses isolées tout aussi bien que les veines descendantes.

On voit, de plus, qu'à l'exception de M. Rodwell, peut-être de M. Billet-Sélis, et peut-être aussi de Magnus dans la seconde partie de son Mémoire, les physiciens qui se sont occupés de la veine liquide depuis 1849, époque de la première publication de ma théorie, n'ont point adopté celle-ci ; MM. Tyndall, Dejean, Fuchs et Reitlinger paraissent l'avoir ignorée, ce qui m'étonne peu, car on ne saurait en soupçonner l'existence d'après le titre de mes séries ; MM. Buff et Maus la connaissent et la rejettent en s'appuyant sur des arguments faciles à réfuter. Du reste, mon premier exposé pouvait, à la rigueur, prêter plus ou moins aux objections de M. Buff; en outre, lorsque MM. Buff et Mauss ont écrit leurs articles, je n'avais pas encore établi par le calcul l'absolue nécessité de la transformation spontanée des cylindres liquides allongés, et ces deux savants ont pu ne pas regarder comme assez concluantes les expériences que j'avais décrites. Je suis tranquille sur l'avenir de ma théorie; telle que je la présente aujourd'hui, elle sera adoptée, parce qu'elle doit l'être, quand on la connaîtra bien [1].

§ 494. Mais je dois revenir sur quelques uns des travaux résumés dans ce qui précède, et d'abord sur ceux de M. Fuchs et de M. Reitlinger, dont les expériences semblent, au premier aperçu, s'accorder difficilement avec ma théorie.

En raisonnant d'après celle-ci, on pourrait croire que l'électricité agit par elle-même pour s'opposer à la transformation spontanée du jet; et l'idée qui se présente naturellement est que cette électricité, en se portant à la surface du liquide, détermine une répulsion entre les molécules de la couche superficielle, et diminue conséquemment les forces capillaires. Mais des expériences encore inédites de M. Van der Mensbrugghe prouvent que l'électricité statique ne change en rien la tension des surfaces liquides, et ainsi n'altère pas les forces capillaires qui émanent de ces surfaces; enfin j'ai cherché à m'assurer, par un moyen direct, si l'électricité statique peut modifier le phénomène de la transformation spontanée des cylindres liquides de petit diamètre : pour cela, on a répété l'expérience des §§ 361 à 363, en faisant communiquer avec le conducteur d'une machine électrique l'un des fils métalliques entre les extrémités amalgamées desquels s'étendait le cylindre mince de mercure; or, dès que les entraves latérales étaient enlevées, ce cylindre, qui avait un diamètre inférieur

(1) Pour les recherches postérieures à 1869, voir les articles inscrits au § 508 sous les nos 14, 17 et 21.

à 1^{mm}, se transformait tout aussi bien, et de la même manière, lorsqu'il était fortement électrisé, que lorsqu'il était à l'état naturel. Il faut donc reconnaître que l'électricité statique n'exerce pas d'action directe sur le phénomène.

Je crois exacte l'idée de MM. Fuchs et Reitlinger, d'après laquelle le fait qu'ils ont étudié serait dû à une destruction de l'adhésion du liquide au bord de l'orifice. Seulement je ne puis supposer, avec M. Reitlinger, que cette destruction provienne d'une faible électrolyse de l'eau, et je pense qu'elle résulte simplement de ce que, sous l'influence de l'électricité, le liquide et le solide se repoussent mutuellement. Reste maintenant à faire voir comment la destruction de l'adhésion détermine la continuité du jet d'eau.

La chose me paraît fort simple : remarquons d'abord que les orifices employés étaient très-étroits ; M. Van der Mensbrugghe, qui a répété une partie des expériences, m'assure que leur pleine réussite exige un orifice ayant moins de 1^{mm} de diamètre. Remarquons, en outre, que le frottement du liquide et l'adhésion au bord d'un orifice si petit ont une influence considérable, puisque le jet d'eau de M. Fuchs ne s'élevait pas même à la moitié de la hauteur de charge ; or on admettra sans peine que ce frottement intense occasionne un mouvement vibratoire dans l'eau du jet, et dès lors la transformation doit être activée. Ainsi que je l'ai déjà rappelé, Savart, qui opérait sous des charges analogues, n'a pu constater, dans ses expériences, aucune influence de ce genre ; mais l'orifice le plus étroit dont il ait fait usage avait 3^{mm} de diamètre, et si l'on réfléchit que, plus l'orifice est petit, plus est grand le rapport de son contour à la surface de la section de la veine qui y passe, on comprendra que l'influence du frottement et de l'adhésion sur les veines de Savart peut avoir été trop faible pour produire un effet appréciable, tandis qu'il n'en est plus ainsi avec un orifice d'un très-petit diamètre. La veine de M. Weisbach (§ 477bis) nous a montré un premier exemple de l'influence probable du frottement du liquide; là l'orifice avait un assez grand diamètre, mais la charge était énorme.

Dans cette manière de voir, l'électricité ne déterminerait point par elle-même la continuité du petit jet d'eau; elle ne ferait que supprimer une cause étrangère qui accélère la transformation, et, dans le jet ainsi abandonné à ses seules forces figuratrices, la séparation des gouttes ne serait pas encore complétement effectuée quand les divisions atteignent le sommet.

C'est effectivement ce que prouvent les expériences de M. Reitlinger sur le petit jet de mercure : comme on l'a vu, quand l'orifice n'était pas amalgamé, et qu'ainsi il n'y avait point d'adhésion, le jet, bien que non soumis à l'influence électrique, se montrait continu dans toute sa longueur; c'était donc là son état naturel. Avec un orifice amalgamé, et conséquemment avec une forte adhésion, les vibrations occasionnées par celle-ci accéléraient la transformation, comme le font en général les mouvements vibratoires, et la discontinuité apparaissait; enfin l'influence électrique ne rétablissait pas la continuité de ce dernier jet, parce que, entre le mercure et l'orifice amalgamé, il y avait continuité métallique, et conséquemment impossibilité d'une répulsion entre le liquide et le solide.

Les mêmes considérations expliquent pourquoi le petit jet d'eau de M. Fuchs était continu en l'absence de l'électricité, quand il sortait par un orifice huilé : l'adhésion et le frottement étant beaucoup diminués, le jet prenait son état naturel, état dans lequel les divisions parvenaient au sommet avant leur transformation complète; avec l'orifice non huilé, au contraire, les vibrations résultant de l'adhésion rendaient la transformation plus rapide, de sorte que celle-ci était achevée à une moindre distance de l'orifice; enfin, sous l'influence de l'électricité, l'adhésion étant détruite, le jet prenait encore son état naturel.

Il est également facile de rendre raison des singuliers effets que M. Fuchs a observés en interceptant l'influence électrique au moyen d'un écran; lorsque celui-ci ne garantissait que l'orifice en laissant tout le reste du jet sous l'influence de l'électricité, la discontinuité subsistait malgré cette influence, parce que les vibrations à l'orifice pouvaient librement se produire; lorsque, au contraire, l'écran abritait le reste de la veine sans abriter l'orifice, le jet était continu, parce que les vibrations n'avaient plus lieu.

§ 495. Dans les §§ 469 à 473, j'ai exposé une théorie des phénomènes que présentent les veines obliquement ascendantes, en partant d'une hypothèse qui m'a paru toute rationnelle; or, à la fin de son Mémoire, Magnus, ainsi qu'on l'a vu (§ 487), explique les mêmes phénomènes à l'aide d'une hypothèse absolument différente; voyons donc si l'on peut décider entre les deux.

Suivant Magnus, la gerbe serait due à des vibrations de l'orifice normales à l'axe de la veine, vibrations qui se transmettraient dans cette dernière; mais, comme Savart l'a observé, la gerbe est contenue tout entière dans un plan vertical, c'est-à-dire dans celui qui passe par la direction initiale de la veine; il faudrait donc, ce qui doit paraître bien peu probable, que les vibrations transversales de l'orifice eussent toujours lieu dans ce plan; il faudrait, en outre, qu'en supprimant les causes de vibrations, on supprimât la gerbe, ou, du moins, on en diminuât l'amplitude; or on a vu que, dans mes expériences, la gerbe est demeurée la même après qu'on avait pris toutes les précautions pour annuler les mouvements vibratoires. On pourrait, il est vrai, trouver encore une cause de vibrations dans le dégagement continuel des bulles d'air amenées par le tube supérieur du vase de Mariotte, dégagement qu'on avait laissé subsister; mais, comme toutes les autres causes avaient été écartées, on aurait dû voir au moins la gerbe devenir plus étroite, ce qui n'a pas eu lieu. Enfin Magnus a reconnu que, dans les veines verticalement descendantes et complétement soustraites aux actions vibratoires, les masses ne s'isolent pas toutes à la même distance de l'orifice, ce qui montre que, dans une semblable veine, les divisions successives, et conséquemment les étranglements successifs, ne sont pas tout à fait identiques; or ce manque d'identité doit évidemment exister de même dans les veines obliquement ascendantes, et j'ai fait voir que la gerbe en est le résultat nécessaire.

Passons à la conversion de la gerbe en un, en deux, ou en trois jets distincts. L'hypothèse de Magnus conduit à cette conversion sous l'influence du son principal, de l'octave grave et de la double octave grave. En effet, dans l'orifice, les vibrations transversales supposées doivent correspondre aux vibrations suivant l'axe de la veine, et, d'autre part, abstraction faite de toute théorie, il résulte des expériences de Savart que le son principal est celui dont les vibrations doubles sont de même période que l'émission des masses isolées; si donc l'instrument sonore rend le son principal, et si une masse s'isole au commencement, par exemple, d'une vibration transversale de l'extrémité de la partie continue, il en sera de même de toutes les masses suivantes : toutes quitteront ainsi la partie continue dans une même direction, et il n'y aura qu'un jet unique. Sous l'influence de l'octave grave, on le voit sans peine, les masses seront lancées alternativement au commencement et à la fin de chaque vibration transversale simple, et il y aura conséquemment deux jets. Enfin on voit également que, sous l'influence de la double octave grave, les masses partiront alternativement au commencement, au milieu et à la fin de chaque vibration transversale simple, d'où trois jets.

Mais si l'on essaie d'appliquer la même théorie au cas des sons compris entre l'octave grave et la double octave grave, on arrive à des résultats en désaccord avec ceux de l'expérience : rappelons-nous que, de l'octave grave à la tierce au-dessous, j'ai toujours obtenu deux jets, et qu'entre ce dernier son et la double octave grave, il y a eu tantôt deux, tantôt trois jets; or, en partant de l'hypothèse de Magnus, on trouvera qu'il devrait se produire, pour la seconde au-dessous de l'octave, dix-sept jets, pour la tierce sept jets, pour la quarte cinq jets, pour la sixte neuf jets, et pour la septième dix-sept jets; pour la quinte seulement, on arrive à l'un des résultats de l'expérience, savoir à deux jets.

D'autre part, suivant mon hypothèse, les grandes divisions déterminées par les vibrations dans le sens de l'axe de la veine, se fractionnent, après leur séparation d'avec la partie continue, en deux ou en trois masses par l'action des forces figuratrices anormales; or la réalité d'un tel fractionnement est prouvée par l'expérience de Magnus sur la veine descendante sortant d'un orifice de très-petit diamètre et soumise à l'influence d'un son : cette veine étant extrêmement mince, le son principal qui lui correspondait devait être fort aigu ; il est donc bien probable que les sons que Magnus faisait agir sur elle étaient relativement très-graves, et qu'ainsi chacune des divisions formées sous l'influence de l'un de ces sons était fort longue. Or on a vu que la partie discontinue de la veine en question se composait de séries comprenant chacune un même nombre de masses équidistantes, ces séries étant séparées par des intervalles plus grands, et il est clair que les milieux de ces grands intervalles correspondent aux milieux des longs étranglements des divisions dues aux vibrations; c'est ainsi, du reste, que Magnus interprète les mêmes intervalles, puisqu'il les attribue aux excursions ascendantes de l'orifice; il est clair également que les masses de chaque série résultent du fractionnement des divisions dont il s'agit. Ajoutons que, dans la figure qui accompagne le Mémoire de Magnus, chaque série comprend trois masses, ce qui s'accorde encore avec mon explication. Il n'y a d'ailleurs aucune raison pour que le fait observé dans une veine descendante et très-mince, ne se produise pas également dans les veines plus épaisses et obliquement montantes.

Mais dès lors on est conduit pour ainsi dire forcément à ma théorie. En effet, les étranglements dus aux vibrations naissant sous une action plus puissante que celle des forces figuratrices, ils doivent se rompre avant ceux que ces dernières forces déterminent; or supposons notre veine oblique soumise à l'influence d'un son qui change la gerbe en deux ou en trois jets; la période d'émission des grandes divisions étant celle des vibrations doubles du son employé, toutes ces divisions s'échapperont nécessairement dans une même direction, qu'il y ait, ou non, des vibrations transversales, et puisque le fractionnement n'a lieu, dans chaque grande division, qu'après le départ de celle-ci, les masses qui résultent de ce fractionnement partiront aussi originairement suivant une même direction ; si donc elles parcourent des trajectoires différentes, il faut bien que cela provienne de différences de vitesse.

A la vérité, les expressions dont se sert Magnus paraissent indiquer qu'il voyait, à travers le disque tournant, toutes les masses s'isoler à une même distance de l'orifice, tandis que, d'après moi, les points de séparation résultant du fractionnement des grandes divisions sont nécessairement plus éloignés de l'orifice que le point où s'isolent successivement ces grandes divisions; mais il est possible que le disque tournant ne permette pas d'observer aisément cette dernière circonstance, ou bien elle a pu échapper à l'attention de Magnus.

Je n'ai pas besoin de faire remarquer que la symétrie d'arrangement des masses isolées s'explique également bien dans les deux théories.

§ 496. On a vu au § 344, que M. Laroque a obtenu une sorte de veine laminaire : or si l'on considère, d'une part, que les figures laminaires consistant en une lame unique sont soumises, quant à leurs formes et à leur stabilité, aux mêmes lois que les figures pleines, et, d'autre part, que, par suite de l'exiguïté de leur masse, leur transformation spontanée, dans les cas d'instabilité, est extrêmement rapide, on comprendra qu'à moins d'une résistance particulière à la transformation, une veine laminaire ne peut avoir qu'une partie continue extrêmement courte, sauf le cas d'une vitesse de translation énorme. Dans les expériences de M. Laroque, où le liquide du vase était animé d'un mouvement de rotation, la cause de résistance est évidente, c'est la force centrifuge du liquide de la veine laminaire; cette veine présentait, il est vrai, des renflements et des étranglements; mais ils occupaient des positions fixes, au lieu de descendre avec le liquide comme le font les divisions d'une veine pleine. Je reviendrai bientôt sur la veine de M. Laroque.

§ 497. J'ai essayé d'obtenir une veine laminaire avec un liquide qui n'était animé d'aucun mouvement de rotation, en faisant simplement écouler ce liquide par une fente circulaire étroite. Le vase, de forme cylindrique, était construit en fer-blanc; il avait une hauteur de 40 centimètres, et un diamètre de 10; au milieu de son fond était percée une ouverture circulaire de 30^{mm} de diamètre; une pièce dont je parlerai plus bas maintenait dans cette ouverture un disque de fer-blanc de 29^{mm} de diamètre, dont le plan coïncidait avec celui du fond, et le centre avec celui de l'ouverture; de cette façon régnait, entre les bords respectifs de l'ouverture et du disque, un espace annulaire continu de $0^{mm},5$ de largeur. La pièce qui soutenait le disque dans l'ouverture était un tube coudé à angle droit, dont une extrémité s'ouvrait dans la paroi latérale du vase, et l'autre au centre du disque; ce tube permettait ainsi un libre accès à l'air dans l'intérieur de la veine. Enfin, pour éviter toute rotation du liquide, le vase contenait un système de quatre plaques à angles droits, semblable à celui qu'a employé Magnus (§ 483); seulement, comme la fente devait demeurer entièrement libre, ces plaques ne descendaient pas jusqu'au fond.

Je m'attendais à ce que, ce vase étant fixé sur un support convenable, puis rempli d'eau et maintenu plein, le liquide sortant par la fente circulaire formât une veine laminaire qui opérerait sa transformation à une petite distance de cet orifice, de manière à donner, à partir de là, une succession continuelle de bulles creuses de plusieurs centimètres de diamètre. Mais il n'en a pas été ainsi: l'eau constituait simplement un sac laminaire de 6 centimètres de longueur, dont la ligne méridienne avait une courbure convexe assez faible, et de la pointe duquel descendait une veine pleine. Le phénomène demeurait le même quand on bouchait le tube qui aboutissait au centre du disque.

Je me suis dit alors qu'on allongerait sans doute le sac, et qu'on arriverait peut-être à réaliser la conversion en bulles, si l'on substituait à l'eau un liquide ayant une tension beaucoup moindre, et dans lequel, par conséquent, les pressions capillaires qui naissent des courbures et qui déterminent la fermeture du sac, seraient beaucoup plus faibles ; à cet effet, on a employé l'alcool ; mais il n'y a eu d'autre modification qu'un accroissement de la longueur du sac, longueur qui a atteint 9 centimètres.

Ainsi, bien que la charge fût assez forte ; bien que le diamètre de la veine, à sa sortie, fût considérable, et que la pression capillaire due à la courbure transversale fût conséquemment peu intense ; enfin bien que la lame fût très-épaisse comparée aux lames liquides ordinaires, et que, par suite, la faible pression capillaire dût agir sur une masse relativement grande, cette pression, en l'absence de toute force centrifuge, suffisait pour fermer la veine à 6 ou à 9 centimètres de l'orifice, suivant le degré de tension du liquide.

§ 498. J'ai voulu savoir ce qui se produirait si, en se servant du même appareil, on imprimait un mouvement de rotation au liquide du vase. On a donc enlevé le système des quatre plaques, et, le vase étant plein d'eau, on y a introduit une baguette qu'on y a fait tourner, d'abord avec une vitesse d'environ deux tours par seconde. Dans ces conditions, on a obtenu un résultat analogue à celui de M. Laroque : le sac partant de la fente avait une longueur de 7 centimètres, et, au dessous de sa pointe, qui n'était pas fermée et constituait ainsi un étranglement, s'étendait un fuseau laminaire d'environ 13 centimètres de longueur et 2 de largeur équatoriale; enfin, au-dessous de la pointe inférieure de ce fuseau, le liquide s'éparpillait en gouttes divergentes. On a doublé ensuite la vitesse de tournoiement de la baguette; alors l'étranglement a pris un diamètre équivalent à peu près à la moitié de celui de la fente, et le fuseau s'est ouvert à sa partie inférieure, du bord de laquelle des gouttes partaient en s'éparpillant; la longueur totale de la figure était de 25 centimètres.

§ 499. Essayons d'expliquer ces résultats. Si le mouvement gyratoire du liquide n'est pas assez intense pour que, à la sortie de l'orifice, la force centrifuge contrebalance les pressions capillaires dues aux courbures transversales, la veine ira d'abord en se resserrant, et les molécules liquides, qui tournent autour de l'axe pendant qu'elles descendent, décriront des hélices allant en se rapprochant de l'axe. Or, pendant ce trajet, la composante horizontale de la vitesse, celle qui constitue le mouvement de rotation, peut être considérée comme gardant la même intensité, et conséquemment la force centrifuge ira en augmentant puisque, pour une vitesse absolue constante, elle est en raison inverse de la distance à l'axe. D'autre part, la pression capillaire augmentera aussi, par l'augmentation de la courbure transversale, et si l'on fait abstraction de la faible courbure méridienne, on voit sans peine que cette pression sera également en raison inverse de la distance à l'axe. Il semblerait donc que, les deux forces opposées croissant suivant la même loi, la seconde, qui l'emportait sur la première à la sortie de l'orifice, doit continuer à l'emporter, et qu'ainsi le sac doit se fermer complétement; mais, à mesure que la lame se resserre, elle augmente en épaisseur en même temps qu'elle diminue en surface; et comme les pressions capillaires ne s'exercent qu'aux deux couches superficielles, si l'on considère celle qui correspond à un élément de la lame, on voit que, sollicitant une masse de plus en plus grande, son action croîtra, en réalité, moins rapidement que ne l'indique la loi ci-dessus; au contraire, la force centrifuge s'exerçant aussi bien sur les molécules de l'intérieur de la lame que sur les molécules superficielles, son action croîtra, dans chaque élément, par l'augmentation de la masse, plus rapidement que ne le veut la loi en question. Conséquemment, à moins que le mouvement gyratoire ne soit trop lent, les deux actions opposées deviendront, à une certaine distance de l'orifice, égales entre elles; mais, dans son mouvement vers l'axe, le liquide, en vertu de son inertie, dépasse le point d'équilibre, de façon que l'action centrifuge est alors en excès, et, lorsque cet excès a détruit l'effet de l'inertie, il écarte graduellement le liquide de l'axe, pour former la moitié supérieure du fuseau; or, dans cet écartement, des effets inverses des précédents se produisent : la lame diminue d'épaisseur, l'action centrifuge décroît, par suite, plus que l'action capillaire, l'équilibre est atteint, puis dépassé en vertu de l'inertie, de sorte que l'action capillaire reprend le dessus et rapproche de nouveau le liquide de l'axe, pour former la moitié inférieure du fuseau. Enfin on comprend que, sous des conditions convenables, les mêmes causes peuvent déterminer la génération d'autres fuseaux au-dessous du premier, et c'est ainsi, je pense, qu'on doit se rendre raison du phénomène observé par M. Laroque.

Si le mouvement gyratoire est tel qu'à la sortie de l'orifice, la force centrifuge neutralise exactement la pression capillaire, l'équilibre continuera à subsister plus bas; car, en vertu de ce qui précède, si le liquide se rapprochait notablement de l'axe, l'action centrifuge l'emporterait, et s'il s'écartait notablement de l'axe, l'action capillaire deviendrait prépondérante. Si donc, dans la seconde expérience, on avait pu augmenter encore la vitesse de rotation, il est bien probable qu'on aurait obtenu une veine à peu près cylindrique. Seulement, dans ce cas de l'égalité entre l'action centrifuge et l'action capillaire, l'accélération de la descente du liquide tend évidemment à rendre la lame de plus en plus mince à mesure qu'on s'éloigne de l'orifice, doù résulte une diminution progressive de l'action centrifuge, et conséquemment une prépondérance graduelle de l'action capillaire ; une semblable veine devrait donc aller en se resserrant quelque peu, afin de maintenir dans la lame l'épaisseur qui convient à l'équilibre des deux actions; elle devrait ainsi constituer non un cylindre, mais une sorte de cône très-allongé.

§ 500. Revenons à l'écoulement sans mouvement gyratoire. Je me suis dit qu'on obtiendrait vraisemblablement la résolution de la veine laminaire en bulles si l'on insufflait de l'air dans son intérieur; j'ai donc fait adapter, à l'orifice latéral du tube qui soutient le petit disque dans l'appareil du § 497, une grosse vessie pleine d'air; on a maintenu dans le vase une charge de 20 centimètres, et, pendant que le liquide sortait par la fente, on a comprimé la vessie. Le sac liquide s'est allongé, et l'on a constaté, en effet, une succession de bulles d'environ 5 centimètres de diamètre, qui se sont incessamment renouvelées tant qu'a duré l'insufflation. Quand on regardait la veine de face, ces bulles passaient avec trop de rapidité pour qu'on pût s'assurer nettement de leur existence ; mais on les distinguait fort bien en regardant la veine de haut en bas sous une grande obliquité. Une fois ces mêmes bulles reconnues, on a cherché, par l'observation de face, à déterminer à quelle distance de la fente elles s'isolaient, et l'on a trouvé, pour autant que l'œil pouvait en juger, que cette distance était comprise entre 15 et 20 centimètres.

Je me suis demandé alors s'il serait possible d'arriver au même résultat sans insufflation, en augmentant considérablement la charge ; mais je suis arrivé à une conclusion négative.

D'abord, ainsi qu'on l'a vu, sous une charge de 40 centimètres, le sac laminaire d'eau, en l'absence de rotation du liquide et d'insufflation, a une longueur de 6 centimètres ; en réduisant la charge à 20 centimètres, c'est-à-dire à la moitié de la précédente, la longueur du sac n'était plus que de 4,5 centimètres ; or le rapport de 4,5 à 6 est 0,75, et celui des racines carrées des deux charges est à fort peu près 0,71 ; ces deux rapports ne différant guère l'un de l'autre, et les mesures du sac n'étant nécessairement qu'approximatives, on peut admettre que la longueur du sac est proportionnelle à la racine carrée de la charge.

D'autre part, si nous désignons par h la charge, par θ le temps qu'emploie une division de la veine laminaire à se convertir en bulle, et par e l'espace que parcourt le liquide pendant ce temps, nous aurons, par la formule connue

$$e = \theta\sqrt{2gh} + \frac{g}{2}\theta^2;$$

Mais, pour $h = 0^m,20$, e est, on l'a vu, compris entre $0^m,15$ et $0^m,20$, et, pour nous placer dans les conditions les plus favorables, nous prendrons $e = 0^m,15$. Si nous substituons ces valeurs de h et de e, ainsi que la valeur connue de g, dans la formule ci-dessus, nous en tirons

$$\theta = 0,''065,$$

et cette valeur doit être sensiblement constante, c'est-à-dire indépendante de la charge; elle donne, pour le terme $\frac{g}{2}\theta^2$, la valeur également constante 0,021.

Maintenant, à cause de la petitesse de ce dernier terme, on voit que e, c'est-à-dire l'espace parcouru pendant la formation d'une bulle, est aussi à peu près proportionnel à la racine carrée de la charge; or, sous une charge de 20 centimètres, et sans insufflation, le sac, dont la longueur n'est que de 4,5 centimètres, est beaucoup plus court que l'espace de 15 centimètres nécessaire, sous cette charge, pour la résolution en bulles; si donc, toujours sans insufflation, on augmente progressivement la charge, la longueur du sac et la distance parcourue pendant le temps θ demeurant l'une et l'autre à peu près proportionnelles à la racine carrée de la charge, la seconde l'emportera de plus en plus sur la première, et ainsi l'on ne pourra jamais arriver à la résolution en bulles. On n'aurait guère à espérer la réussite en rendant la lame plus mince, ce qui diminuerait θ et, par suite, e; car on diminuerait en même temps, et sans doute dans une proportion aussi forte, la longueur du sac produit sans insufflation.

Notre veine laminaire, quand on y insufflait de l'air, avait, d'après ce qui précède, une partie continue de 15 à 20 centimètres, sous une charge de 20 centimètres; mais cette veine avait, à l'orifice, un diamètre de 3 centimètres; si la fente annulaire n'avait eu que le diamètre des veines liquides ordinaires, 6^{mm} par exemple, il suit des lois de la transformation des cylindres (§ 384) que, sous la même charge, la partie continue n'aurait été que de 3 à 4 centimètres; et si la lame, au lieu d'être épaisse, avait eu la minceur des lames qui constituent les bulles de savon, cette partie continue aurait été bien plus courte encore.

§ 501. La file de petites bulles de résine qu'un enfant montra à Morey (§ 323), peut être considérée comme une veine laminaire dans laquelle on insuffle de l'air et qui se solidifie pendant sa transformation. Si l'on veut se figurer d'une manière plus précise comment un semblable collier a pu se façonner, on doit admettre qu'au moment où l'extrémité du tube est sortie de la résine fondue et où l'on commence à souffler, une bulle se développe; mais que, saisie par le froid extérieur et ne pouvant dès lors continuer à grossir, elle tend, chassée par l'air qui lui arrive, à se détacher du tube, en laissant d'abord derrière elle un effilement; que celui-ci est solidifié à son tour avant d'avoir pu se rompre, de sorte qu'une seconde bulle se forme, laquelle est saisie de même par le froid, puis une troisième, et ainsi de suite. Il est clair, du reste, que, pour amener un bon résultat, le souffle doit être bien régulier et d'une intensité convenable.

§ 502. Une veine liquide pleine qui s'écoule dans l'air est un courant liquide qui traverse un gaz; or on peut prendre les conditions inverses : on peut se demander quelle est la constitution d'un courant gazeux qui traverse un liquide, et chercher si la théorie la fait prévoir ou en rend raison. C'est ce que je vais examiner.

Concevons que d'un tube aboutissant verticalement de bas en haut au fond d'un liquide, se dégage abondamment un gaz que ce liquide ne dissout point, comme, par exemple, dans le procédé dont se servent les chimistes pour recueillir certains gaz sous une cloche primitivement pleine d'eau. Les molécules de ce gaz étant, à leur sortie du tube, animées d'un mouvement vertical de bas en haut, tendent à conserver ce même mouvement, et conséquemment le courant gazeux tend à traverser le liquide sous la forme d'un cylindre vertical continu, s'étendant de l'orifice du tube à la surface supérieure de ce liquide. Mais deux causes distinctes s'opposent à ce que le courant prenne cette forme : la première est la pression hydrostatique latérale du liquide, pression qui va en augmentant à partir du niveau jusqu'à l'orifice du tube ; la seconde consiste dans les actions figuratrices moléculaires s'exerçant à la paroi liquide qui limite le courant.

Faisons d'abord abstraction de cette seconde cause, et cherchons quelle serait la forme du courant sous la seule influence combinée de la force qui pousse le gaz de bas en haut et de la pression hydrostatique du liquide. Le gaz tend, comme nous l'avons vu, à se creuser dans le liquide un canal cylindrique vertical; mais le liquide, en vertu de sa pression hydrostatique, devrait resserrer ce canal, tout en lui laissant sa forme de révolution, en sorte que la paroi liquide qui limite le courant serait, à partir du contour de l'orifice du tube, inclinée de tous les côtés vers l'axe. D'après cela, dans l'hypothèse où nous nous sommes placés de l'absence des forces figuratrices moléculaires, si, en un point quelconque de la paroi liquide, on décompose, dans un plan méridien, la force verticale des molécules gazeuses en deux autres forces, l'une tangente et l'autre normale à la ligne méridienne, il suffira évidemment, pour l'équilibre de figure, que cette dernière composante soit égale à la pression hydrostatique du liquide au même point. Or cette pression va en diminuant de l'orifice au niveau supérieur, et conséquemment, pour que la composante normale de la force ascensionnelle diminuât comme la pression, il faudrait que la paroi liquide se redressât graduellement à partir de l'orifice du tube, jusqu'à devenir tout à fait verticale au niveau supérieur, où la pression étant nulle, la composante normale devrait être également nulle.

On le voit donc, si les forces figuratrices moléculaires n'existaient pas, le canal à paroi liquide présenterait en creux, et de bas en haut, une forme analogue à celle que présente en relief, et de haut en bas, la partie en apparence lisse d'une veine liquide s'écoulant par un orifice circulaire percé en mince paroi dans le fond horizontal d'un vase, et nous savons que, dans toute l'étendue de cette partie lisse, l'effet des forces figuratrices demeure très-peu prononcé; en outre, de même que la partie lisse d'une veine liquide approche d'autant plus d'être cylindrique que la vitesse d'écoulement est plus grande, de même aussi notre canal approcherait d'autant plus de constituer un cylindre creux que la vitesse du gaz serait plus considérable.

§ 503. Mais comme les forces figuratrices moléculaires exercent leur action, les choses ne peuvent se passer de cette manière. Ainsi que je l'ai déjà fait remarquer plusieurs fois, les conditions de l'équilibre et de la stabilité, au point de vue des forces moléculaires, sont les mêmes pour une figure liquide en creux et pour une figure liquide en relief; or, nous le savons, sous l'empire des forces moléculaires, le liquide qui constitue une veine passe graduellement, pendant son mouvement de translation, à l'état de masses séparées les unes des autres; donc, en vertu de l'analogie de forme que j'ai signalée, la figure liquide en creux qui servirait de canal au courant de gaz doit passer à l'état d'espaces creux séparés par du liquide. En d'autres termes, notre courant gazeux doit, pendant son mouvement ascensionnel, se convertir en bulles isolées, et c'est en effet ce qui a lieu, comme chacun le sait.

Cependant les circonstances des deux phénomènes présentent une différence essentielle, qui altère la similitude de ces phénomènes eux-mêmes : dans une veine liquide pleine, un étranglement ne s'approfondit qu'en chassant dans les deux renflements adjacents le liquide qui le constitue; or ce transport dans les deux sens exige des déplacements relatifs considérables des molécules, et le liquide, en vertu de sa viscosité, résiste plus ou moins à ces déplacements relatifs; de là résulte qu'il s'écoule un temps notable entre la naissance de chaque étranglement à la section contractée et la rupture du filet dans lequel cet étranglement se convertit, et que, pendant ce temps, l'étranglement parcourt un assez grand espace, de sorte que la veine préseute une partie continue assez longue.

Maintenant, dans notre veine gazeuse, un étranglement s'approfondit en chassant dans les deux renflements adjacents non du liquide, mais du gaz, et celui-ci oppose aux déplacements relatifs de ses molécules une résistance incomparablement plus faible, d'où il suit que le temps qui s'écoule entre l'instant de la naissance de cet étranglement près de l'orifice et celui de sa rupture, doit être aussi incomparablement plus court. A la vérité, les modifications de l'étranglement ne s'effectuent que par un mouvement du liquide ambiant; mais il est visible que ce mouvement s'accomplit avec des déplacements relatifs beaucoup moindres, et, par suite, avec beaucoup moins de résistance que celui qui a lieu à l'intérieur d'un étranglement de la veine liquide. Conséquemment l'espace parcouru dans le mouvement de translation, pendant ce même temps, sera bien plus petit, à égalité de diamètre d'orifice et de vitesse de sortie, pour le courant gazeux que pour la veine liquide, de sorte qu'à moins d'une vitesse énorme, le premier ne présentera pas notablement de partie continue.

§ 504. Pour soumettre ces déductions à l'épreuve de l'expérience, j'ai fait passer un courant d'air à travers de l'eau contenue dans le vase à parois planes en verre qui sert aux expériences avec l'huile et le liquide alcoolique. Le courant était amené par un tube en verre de 5^{mm} environ de diamètre intérieur, partant d'un gazomètre et recourbé de manière à descendre au fond du vase, puis à se relever verticalement jusqu'à quelques centimètres de ce fond; le niveau de l'eau dans le vase était à 15 centimètres au-dessus de l'orifice du tube; enfin l'air, dans le gazomètre, était soumis à une pression de 130 centimètres d'eau.

Avec ces conditions, qui devaient donner une vitesse considérable au courant gazeux, celui-ci, dans son passage à travers l'eau du vase, paraissait continu à l'œil; mais il était loin d'offrir la forme décrite dans le § 502; celle qu'il présentait était assez peu régulière;

cependant on pouvait y observer des espèces de ventres et de nœuds, à peu près comme dans la partie trouble d'une veine liquide; enfin un bouillonnement continuel avait lieu à l'endroit où il perçait la surface de l'eau.

Ce bouillonnement permet de conclure que le courant gazeux, malgré sa grande vitesse, n'atteignait la surface de l'eau qu'en bulles isolées; de plus, sa figure apparente, si éloignée de celle qu'il aurait offerte s'il avait été réellement continu sur une partie notable de sa longueur, devait porter à croire que les bulles se formaient déjà très-près de l'orifice, et que l'aspect continu du courant dans toute son étendue était une simple illusion due au passage rapide de ces bulles, absolument comme l'aspect continu de la partie trouble d'une veine liquide est dû au passage rapide des masses isolées.

Pour rendre la chose plus certaine, on a abaissé le niveau de l'eau dans le vase jusqu'à ce qu'il ne fût plus qu'à environ 2 centimètres au-dessus de l'orifice du tube, et le bouillonnement n'a aucunement disparu; les bulles isolées se forment donc en réalité très-près de l'orifice, même pour de grandes vitesses; en d'autres termes, la veine gazeuse n'a pas de partie continue. Quant à l'apparence de ventres et de nœuds, dont j'ai parlé plus haut, elle provient probablement de ce que chaque bulle qui se développe à l'orifice, rencontrant la résistance de l'eau du vase, s'aplatit d'abord dans le sens vertical, puis, pendant son mouvement à travers le liquide, exécute des oscillations de forme analogues à celles des masses isolées d'une veine liquide.

Un dernier fait particulier au courant gazeux, c'est l'absence de petites bulles accompagnant les grosses; ces petites bulles, si elles se produisaient, seraient rejetées en dehors du courant, par suite de la résistance plus grande qu'éprouverait leur mouvement ascensionnel à travers l'eau, et deviendraient ainsi visibles ; or on n'en distingue que rarement, d'où il suit que lorsqu'une grosse bulle s'isole près de l'orifice, l'étranglement au moyen duquel s'opère la séparation se ferme sans donner naissance à un filet gazeux ; c'est que cet étranglement est trop court, et l'absence de filet et de sphérules constitue le second des exemples auxquels j'ai fait allusion dans le § 383.

§ 505. Revenons pour un instant au tube liquide à paroi épaisse obtenu par Magnus et par M. Laroque dans le cas d'un mouvement de rotation modéré du liquide (§ 483). Il suit de ce que nous venons d'exposer au sujet du courant gazeux, que, sans l'intervention de la force centrifuge, l'air qui pénètre dans la veine devrait, dès son entrée, se convertir en bulles isolées, lesquelles descendraient entraînées par le mouvement de translation du liquide en se renouvelant sans cesse près de l'orifice. L'absence de cette conversion s'explique, je pense, par les principes développés dans le § 499 à l'égard des veines laminaires : si un étranglement se dessinait, le liquide qui affluerait vers l'axe pour former cet étranglement, apporterait dans celui-ci sa vitesse absolue de rotation en même temps qu'une augmentation de masse, en sorte que l'action centrifuge y deviendrait prépondérante, et éloignerait de nouveau le liquide de l'axe. L'étranglement ne peut donc naître, et c'est ainsi que l'air s'étend, dans l'intérieur de la veine, en une longue traînée continue, traînée qui constitue, en apparence, une exception aux lois de l'équilibre des figures allongées en creux ou en relief.

Cependant le maintien de la traînée gazeuse exige évidemment que le mouvement gyratoire ne soit pas trop lent; on comprend, en effet, qu'au delà d'une certaine diminution de ce mouvement, les variations de l'action centrifuge ne peuvent plus suffire pour s'opposer aux forces figuratrices; aussi M. Laroque a-t-il observé, lors d'un affaiblissement ultérieur de la rotation, que la traînée se façonnait en une suite de renflements et d'étranglements.

§ 506. Retournons au courant gazeux qui traverse un liquide en repos. Son fractionnement en bulles successives à partir de l'orifice même, explique le glouglou qui se produit lorsqu'on incline un flacon plein de liquide pour en faire sortir celui-ci : un échange s'établit alors entre le liquide qui s'écoule et l'air qui le remplace; mais dès qu'une portion d'air s'introduit dans le goulot, les forces figuratrices commencent à l'arrondir, elles en resserrent rapidement la partie voisine de l'orifice, l'étranglement ainsi formé se rompt, et la portion d'air se trouve séparée, à l'état de bulle complète, de l'air qui tendait à la suivre; le liquide occupe donc alors tout l'orifice, en sorte que l'échange avec l'air extérieur est interrompu, et que, par suite, l'écoulement est momentanément arrêté; puis les mêmes phénomènes se reproduisent, une seconde portion d'air entre dans le goulot pour remplacer une égale portion de liquide qui sort, cette portion d'air est façonnée en bulle comme la première, l'écoulement éprouve une nouvelle interruption par la fermeture de l'étranglement, pour recommencer de la même manière, et ainsi de suite. Les saccades que présente l'écoulement d'un liquide dans les circonstances dont il s'agit, résultent donc encore de l'action des forces qui tendent à donner à la surface liquide en contact avec le gaz une figure d'équilibre stable. Sans cette action, l'échange entre le liquide et l'air s'opérerait d'une manière tranquille : le premier sortirait par la partie la plus basse du goulot sous la forme d'un courant continu, tandis que le second entrerait par la partie la plus haute, également sous la forme d'un courant continu, et traverserait, sans se diviser, le liquide renfermé dans le corps du flacon : c'est ainsi, par exemple, que, dans l'expérience du passe-vin, l'échange des deux liquides à la petite ouverture se fait sans saccades, et qu'on voit un filet rouge continu à partir de cette ouverture jusqu'au niveau de l'eau, parce que, à cause du peu de différence de nature de ces deux liquides, il ne se développe point, à la surface par laquelle ils se touchent, de forces figuratrices sensibles.

§ 507. Il me reste maintenant à payer un juste tribut de reconnaissance aux personnes qui, dans cette longue suite de recherches, ont bien voulu m'aider, en effectuant, sous ma direction, les expériences ou les calculs. Aux noms que j'ai cités dans le § 8, j'ajoute ici ceux de M. Kekule, alors professeur de chimie à l'Université de Gand, et de M. Rottier, répétiteur de chimie industrielle au même établissement ; tous deux ont bien voulu préparer pour moi certaines substances qui m'étaient nécessaires.

Grâces soient donc rendues à ces amis dévoués, dont le bienveillant concours a permis au physicien frappé de cécité, de poursuivre sa route d'un pas ferme, et d'apporter son contingent de matériaux à l'édifice de la science.

§ 508. Je termine en énumérant ici les Notes et Mémoires publiés depuis la fin de 1869, époque où s'arrêtent mes Historiques, sur des sujets ayant trait au mien.

1° M. Tomlinson : *On the motions of certain liquids on the surface of water* (PHILOS. MAGAZ., 4me série, 1870, vol. XXXIX, p. 32).

Il y est question de la viscosité superficielle des liquides.

2° M. Quincke : *Ueber Capillaritäts-Erscheinungen* *an der gemeinschaftlichen Oberfläche zweier Flüssigkeiten* (ANN. DE M. POGGENDORFF, 1870, vol. CXXXIX, p. 1).

C'est, in-extenso, le Mémoire dont j'ai analysé un extrait au § 169.

3° M. Paul du Bois-Reymond : *Ueber den Antheil der Capillarität an den Erscheinungen der Ausbreitung der Flüssigkeiten*. (Ibid., p. 262).

4° Sir W. Thomson : *The size of atoms*. (Journal NATURE, 1870, vol. I, p. 551).

5° M. Van der Mensbrugghe : *Sur la viscosité superficielle des lames de solution de saponine* (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 1870, 2me série, t. XXIX, p. 368).

6° M. Lüdtge : *Ueber die Spannung flüssiger Lamellen* (ANN. DE M. POGGENDORFF, 1870, vol. CXXXIX, p. 620).

7° M. Luvini : *Alcune sperienze e considerazioni intorno all' adesione tra solidi e liquidi* (ATTI DELLA REAL ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO, vol. V, 1870).

8° M. Van der Mensbrugghe : *Sur un principe de statique moléculaire avancé par M. Lüdtge* (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 1870, 2me série, t. XXX, p. 322).

9° Sir W. Thomson : *On the equilibrium of vapour at a curved surface of liquid* (PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY OF EDINBURGH FOR 1869-70).

10° M. Duclaux : *Sur la tension superficielle des liquides* (ANN. DE CHIM. ET DE PHYS. de Paris, 1870, 4me série, t. XXI, p. 378).

11° M. Marangoni : *Sulla proprietà che hanno varj liquidi d'impedire o far cessare talune reazioni tra acidi e metalli* (NUOVO CIMENTO, série 2, vol. IV, Déc. 1870).

12° M. Mousson : *Bemerkungen über die Theorie der Capillarerscheinungen* (ANN. DE M. POGGENDORFF, 1871, t. CXLII, p. 405).

13° M. Schwarz : *Bestimmung einer speciellen Mini-*

malfläche (MÉMOIRE COURONNÉ PAR L'ACADÉMIE DE BERLIN en 1867, et publié en 1871).

C'est le Mémoire dont j'ai parlé au § 143.

14° M. l'abbé Laborde : *Caléfaction, faits nouveaux* (LES MONDES, 1871, 2me série, t. XXV, p. 379).

15° M. Norris : *Soap-bubble experiments* (Journ. NATURE, 1871, vol. III, p. 395).

16° Sir W. Thomson : *Ripples and waves* (Ibid., 1871, vol. V, p. 1).

17° M. Beetz : *Ueber die Einwirkung der Elektricität auf Flüssigkeitsstrahlen* (ANN. DE M. POGGENDORFF, 1871, vol. CXLIV, p. 443).

18° M. Bosscha : LEERBOEK DER NATUURKUNDE EN HARE VOORNAAMSTE TOEPASSINGEN (4me livrais. 1re partie, Leyde, 1871).

19° M. Mach : *Eine akustische Mittheilung* (TAGEBLATT DER 44ste VERSAMMLUNG DEUTSCHER NATURFORSCHER UND AERZTE, 1871, p. 53).

Le travail est relatif à l'oreille. L'auteur, à propos d'une question concernant les vibrations du tympan, a observé celles de petites lames de liquide glycérique.

20° Mellberg : *Om utspänningen hos vätskor* etc. (*Sur la tension superficielle des liquides* etc.). Helsingfors, 1871.

21° M. Bosscha : (PROCÈS-VERBAUX DE LA SECTION DE PHYSIQUE DE L'ACAD. D'AMSTERDAM, 1871-1872, nos 3 et 5).

22° M. Valson : *Sur une relation entre les actions capillaires et les densités dans les solutions salines* (COMPTES RENDUS, 1872, t. LXXIV, p. 103).

23° M. Van der Mensbrugghe : *Note préliminaire sur un fait remarquable qu'on observe au contact de certains liquides de tensions superficielles très-différentes* (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 2me série, 1872, t. XXXIII, p. 223).

24° M. Schwarz : *Fortgesetzte Untersuchungen ueber specielle Minimalflächen* (BULLET. DE L'ACAD. DE BERLIN, 1872, p. 3).

25° M. Marangoni : *Sul principio della viscosità superficiale dei liquidi stabilito dal signor J. Plateau* (NUOVO CIMENTO, 2me série, vol. V-VI, Avril 1872).

26° M. Mach : *Die Gestalten der Flüssigkeit*. Prague, 1872 (Conférence donnée en 1868).

27° MM. Tomlinson et Van der Mensbrugghe : *On a relation between the surface-tension of liquids and the supersaturation of saline solutions* (PROCEEDINGS DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DE LONDRES, n° 135, 1872).

28° M. Moutier. *Sur la tension superficielle des liquides* (JOURN. DE PHYS. DE M. D'ALMÉIDA, 1872, t. I, p. 98).

29° M. Duclaux : *De l'influence de la tension superficielle des liquides sur les mesures aréométriques* (Ibid., p. 197).

30° M. Mach : *Optisch-akustische Versuche. — Die spectrale und stroboskopische Untersuchung tönender Körper*. Prague, 1872 (1), p. 92-94.

31° M. Van der Mensbrugghe : *Sur la tension superficielle des liquides* (JOURN. DE PHYSIQUE DE M. D'ALMÉIDA, t. I, 1872, p. 321).

32° M. Gernez : *Sur les propriétés des lames minces élastiques* (Ibid. ibid., p. 324).

33° M. Duclaux : *Sur la capillarité* (Ibid. ibid., p. 350).

34° M. Gernez : *Note relative à l'action prétendue des lames minces liquides sur les solutions sursaturées* (COMPTES RENDUS, 1872, t. LXXV, p. 1705).

35° J. Plateau : *Réponse aux objections de M. Marangoni contre le principe de la viscosité superficielle des liquides* (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 1872, 2me série, t. XXXIV, p. 404).

(1) Le Mémoire porte par erreur la date de 1873.

36° M. Duclaux : *Théorie élémentaire de la capillarité, fondée sur la connaissance expérimentale de la tension superficielle des liquides*, 1872, Paris.

37° M. Schwarz : *Beitrag zur Untersuchung der zweiten Variation des Flächeninhalts von Minimalflächen im Allgemeinen und von Theilen der Schraubenfläche im Besonderen* (BULLET. DE L'ACAD. DE BERLIN, 1872, p. 718).

38° MM. Marangoni et Stefanelli : *Monografia sulle bolle liquide* (NUOVO CIMENTO, 1872, 2^me^ série, t. VII-VIII, p. 301, et 1873, t. IX, p. 236).

39° M. Van der Mensbrugghe : *Réponse à la communication précédente de M. Gernez* (COMPTES RENDUS, 1873, t. LXXVI, p. 45).

40° M. Gernez : *Note relative à l'action prétendue des liquides à faible tension superficielle sur les gaz dissous dans les liquides à forte tension superficielle* (Ibid., p. 89).

41° M. Moutier : *Sur la tension superficielle des liquides* (JOURN. DE PHYS. DE M. D'ALMÉIDA, t. II, 1873, p. 27).

42° M. Gernez : *Sur un nouveau moyen de déterminer la position des surfaces nodales dans les masses gazeuses vibrantes* (COMPTES RENDUS, 1873, t. LXXVI, p. 771).

43° M. Lissajous : *Méthode pour étudier la propagation des ondes* (JOURN. DE PHYS. DE M. D'ALMÉIDA, Mars 1873, p. 99).

44° M. Van der Waals : *Over de continuiteit van den gas- en vloeistoftoestand* (Dissertation inaugurale, Leyde, 1873).

45° M. Van der Mensbrugghe : *Sur la tension superficielle des liquides considérée au point de vue de certains mouvements observés à leur surface*, 2^me^ Mémoire (ACAD. DE BELGIQUE, t. XXXVII des Mém. couronnés et Mém. des savants étrangers).

46° M. Gernez : *Expériences de capillarité* (JOURN. DE PHYS. DE M. D'ALMÉIDA, t. II, 1873, p. 326).

47° M. Tomlinson : *On the motions of camphor and of certain liquids on the surface of water* (PHILOS. MAGAZ., 4^{me} série, vol. XLVI, 1873, p. 376).

48° M. Lippmann : *Beziehungen zwischen den capillaren und elektrischen Erscheinungen* (ANN. DE M. POGGENDORFF, 1873, vol. CXLIX, p. 546).

NOTA. Les trois derniers articles ci-dessus ont été publiés depuis l'impression de mes Historiques relatifs à la tension et aux lames liquides; il faut, en conséquence, ajouter les n^{os} 47 et 48 à l'énumération contenue dans la troisième note du § 169, et le n° 46 à celle que donne la deuxième note du § 354bis.

D'autre part, j'ai trouvé tout récemment la mention d'un article concernant la veine liquide ; mais, n'ayant pu le consulter, j'ignore s'il a trait à la constitution de la veine ; je l'inscris ici simplement d'après son titre. Il est indiqué dans un résumé des travaux de l'Académie de St Pétersbourg pour l'année 1870 (voir le journal *Les Mondes*, t. XXXII, 1873, p. 378). L'auteur de ce résumé s'exprime ainsi : « Nous avons, en outre, inséré dans nos publications les recherches de M. Popow *Sur la surface libre du courant constant d'un liquide homogène soumis à l'action de la pesanteur et coulant d'un orifice horizontal et circulaire.* »

FIN.

TABLE ANALYTIQUE

DES

MATIÈRES DU TOME SECOND.

CHAPITRE VII.

Recherche des causes principales d'où dépendent le facile développement et la persistance des lames liquides : viscosité superficielle; influence du rapport entre cette viscosité et la tension.

Préambule . . . . § 241
M. Gladstone : tous les liquides peuvent, par l'agitation, donner des calottes laminaires à leur surface; la faculté de certains liquides de se recouvrir d'une mousse abondante et permanente, paraît ne dépendre d'aucune propriété connue. . . . . § 242
Les lames liquides n'ont, par elles-mêmes, pas plus de tendance à se rompre lorsqu'elles sont très-minces que lorsqu'elles sont épaisses. § 243
Procédé pour la comparaison des lames des différents liquides : observation des petites calottes. Dispositif des expériences . . . § 244
Les liquides peuvent se partager, au point de vue de leurs lames, en trois catégories principales. Caractères de ces catégories . . . § 245
Faits particuliers présentés par les calottes de la première catégorie. § 246
Idem par celles de la deuxième catégorie. . . . . § 247
Idem par celles de la troisième catégorie . . . . § 248
Idem par celles de deux liquides intermédiaires. Premier exemple d'un liquide ne se laissant pas gonfler en bulles quoique fournissant une mousse volumineuse et persistante . . . . § 249
Examen de ce qui se produit dans la lame qui constitue une calotte, par la descente graduelle du liquide; trois cas possibles : 1° augmentation d'épaisseur du sommet à la base, 2° uniformité d'épaisseur, 3° décroissement d'épaisseur du sommet à la base. . . . § 250
Expérience à l'appui de l'explication du troisième cas . . . . . § 251
Les lames de la première catégorie et celles de la troisième ne s'amincissent que très-lentement; les lames de la deuxième s'amincissent, au contraire, avec une extrême rapidité. On conclut de là que la couche superficielle des liquides de la première catégorie et de la troisième possèdent une viscosité propre très-forte. § 252

Cause probable de la rupture spontanée des calottes de la première catégorie. Influence de l'atmosphère environnante. Influence de l'évaporation. Pourquoi les liquides de cette catégorie ne se laissent pas gonfler en bulles. . . . . § 253
La même cause de rupture n'existe pas pour les calottes de la deuxième catégorie. Pourquoi les liquides de celle-ci ne se laissent pas non plus gonfler en bulles . . . . § 254
Considération sur le phénomène de l'inversion des teintes . . . § 255
Hypothèse proposée par M. Van der Mensbrugghe pour rendre raison de cette inversion . . . . § 256
La rupture spontanée des calottes de certains liquides de la deuxième catégorie, avant la fin de la phase blanche, paraît dépendre de la grande tendance de ces liquides à s'évaporer . . . . § 257
Pour qu'un liquide se laisser gonfler aisément en bulles, il faut que sa tension soit faible relativement à sa viscosité superficielle; c'est le cas des liquides de la troisième catégorie. . . . . . § 258
Dans deux liquides fournissant des bulles de même diamètre maximum, le rapport entre la viscosité superficielle et la tension est moins grand à l'égard de celui où cette viscosité est moindre. . § 259
Phénomènes curieux que présentent les calottes de solution de savon de Marseille qui deviennent entièrement noires . . . . . . § 260
Mode d'expérience pour la constatation directe de la viscosité superficielle et de ses différences : temps qu'emploie à décrire un angle déterminé, d'abord sur la surface, puis à l'intérieur du liquide, une aiguille aimantée écartée du méridien magnétique . § 261
Application aux liquides de la première catégorie :
1° Eau distillée : les résultats manifestent une viscosité superficielle beaucoup plus forte que la viscosité intérieure . . . . § 262
2° Glycérine de Price : même conclusion . . . . § 263
3° Solution saturée de carbonate de soude : même conclusion . § 264
4° Solution saturée d'azotate de potasse : même conclusion . § 265
5° Solution saturée de chlorure de calcium : même conclusion, après avoir écarté une cause perturbatrice . . . . § 266
Application du même mode aux liquides de la deuxième catégorie :
1° Alcool : les résultats montrent que, dans ce liquide, la viscosité superficielle n'excède nullement la viscosité intérieure . . § 267
2° Essence de térébenthine : même conclusion ; en outre, probabilité que, dans ce liquide au moins, la viscosité superficielle est plus faible que la viscosité intérieure; excès négatif. . . . . § 268
3° Huile d'olive : cause perturbatrice due à la forte viscosité intérieure ; comment on s'en garantit. Ce liquide paraît avoir aussi un excès négatif. . . . . § 269
4° Ether sulfurique : absence d'excès positif . . . . . . § 270
5° Sulfure de carbone : même conclusion. Explication, par M. Van der Mensbrugghe, des mouvements des petits corps flottants sur ce liquide et sur l'éther . . . . § 271

Expérience qui met en évidence un excès négatif dans l'alcool . . § 272
Application des formules du pendule aux expériences faites avec l'aiguille aimantée sur les liquides de la deuxième catégorie . . § 273
Résultats qu'on en déduit à l'égard de quatre de ces liquides. Probabilité que tous les liquides de la deuxième catégorie ont des excès négatifs . . . . § 274
Emploi de l'aiguille à l'égard des liquides de la troisième catégorie :
1° Solution de savon de Marseille à $\frac{1}{40}$; excès positif, peu différent de celui de l'eau distillée. — Pourquoi on ne peut gonfler de bulles avec une solution alcoolique de savon de Marseille . . § 275
2° Solution de savon mou de ménage à $\frac{1}{30}$: même conclusion . § 276
3° Solution de savon de colophane à base de potasse : excès positif encore . . . . § 277
4° Solution de saponine à $\frac{1}{100}$, puis à $\frac{1}{60}$: viscosité superficielle énorme. Expériences diverses à ce sujet . . . . § 278
Une solution de saponine à $\frac{1}{4000}$ offre un second exemple d'un liquide donnant une mousse abondante et durable, et ne se laissant pas gonfler en bulles. — Cause d'inexactitude dans une formule de Dupré . . . . § 279
Preuves que le facile développement en bulles n'est point dû à la viscosité intérieure. Cette viscosité a cependant une petite influence . . . . § 280
Essai de la solution d'albumine : viscosité superficielle extrêmement énergique, quoique moindre que celle de la solution de saponine. — Etendue de 10 fois son volume d'eau, la solution d'albumine offre un troisième exemple à ajouter à ceux des §§ 249 et 279. . § 281
Enoncé du principe général relatif à la viscosité superficielle . . § 282
Historique de la viscosité superficielle. Descartes : première mention de cette viscosité à l'égard de l'eau . . . . § 283
Petit : la cause qui fait flotter les aiguilles est la présence d'une couche d'air adhérente à leur surface. — Rumford : influence nulle de la couche d'air, hypothèse d'une pellicule résistante à la surface de l'eau; expériences. . . . . § 284
Link : la pellicule existe sur tous les liquides; hypothèse sur sa cause; singulière théorie de la solidité . . . . § 285
Prechtl : expérience à l'appui de l'existence de la pellicule à la surface de l'eau. Pichard, Gillieron, de Maistre . . . . . . § 286
M. Artur : dans tous les liquides, la couche superficielle est plus dense et plus cohérente que l'intérieur; le phénomène des aiguilles flottantes ne peut s'expliquer par les seules lois de l'hydrostatique § 287
M Hagen : densité plus grande et résistance à la surface de tous les liquides; faits à l'appui. . . . . § 288
M. Marangoni : expérience qui montre, dans le mercure, une viscosité superficielle énergique . . . . § 288bis
M. Nägeli : la viscosité superficielle est la cause de la résistance qu'opposent les colonnes capillaires divisées . . . . § 289

M. Stanislas Meunier : excès de densité dans la couche superficielle de tous les liquides ; faits à l'appui . . . . § 290
Recherche d'un procédé pour la mesure de la viscosité superficielle. L'emploi des résistances que présentent les colonnes capillaires diviseés, est sujet à trop d'incertitudes . . . . § 291
Autre procédé, qui donne, mais seulement d'une manière approchée, les valeurs relatives de cette viscosité dans les liquides soumis aux expériences avec l'aiguille aimantée; il est fondé sur la comparaison des durées respectives du parcours de l'aiguille sur la surface et à l'intérieur du liquide. Valeurs fournies par ce procédé § 292
Discussion de ces valeurs. Correction que doit subir celle qui appartient à la glycérine . . . . § 293
Contradictions apparentes; elles proviennent d'une petite influence de la viscosité intérieure . . . . § 294
Nouvelles raisons à l'appui de la légitimité du procédé. . . . . § 295
Rapport des viscosités superficielles aux tensions des lames, en représentant par 100 la viscosité superficielle de l'eau. . . . . . § 296
Discussion de ces rapports; ils confirment la théorie . . . . . § 297
Nouveaux exemples de la petite influence de la viscosité intérieure . § 298
Détermination approximative de la viscosité superficielle du liquide glycérique; tension du même liquide; rapport de ces deux éléments : accord avec la théorie. . . . . § 299
Etude théorique du fait que la lame qui constitue une bulle de liquide glycérique va d'abord en s'amincissant, puis reprend une épaisseur croissante. . . . . § 300
Expérience à ce sujet. . . . . § 301
Causes de la grande persistance des lames de liquide glycérique. . § 302
Pourquoi le maximum de persistance des bulles de liquide glycérique réalisées en vase clos exige que ce vase ait de grandes dimensions et que son atmosphère ne soit pas trop desséchée . . . . . § 303
Pourquoi certains liquides donnent, par l'agitation, une mousse volumineuse et durable, et ne se laissent cependant pas gonfler en bulles à l'orifice d'une pipe . . . . § 304
Conclusion . . . . § 305

CHAPITRE VIII.

Causes accessoires qui influent sur la persistance des lames liquides. — Figures laminaires de très-grande durée. — Historique concernant les lames liquides.

Première cause accessoire qui influe sur la persistance des lames : les petites agitations de l'air ambiant, et les vibrations propagées par le sol . . . . § 306
Deuxième cause : l'évaporation, quand le liquide en est susceptible; elle diminue la persistance des lames formées des liquides de la

troisième catégorie. Procédé du Dr Reade pour réaliser des lames d'eau de savon très-persistantes . . . . § 307
Troisième cause, particulière au liquide glycérique : la température. § 308
Quatrième cause : l'action de la pesanteur, et, par suite, le plus ou moins d'inclinaison des lames; expériences. Pourquoi les lames d'huile, si peu durables dans l'air, persistent au contraire longtemps dans le liquide alcoolique . . . . § 309
Cinquième cause : la combinaison des lames en systèmes; ces assemblages se maintiennent toujours beaucoup moins longtemps que les figures formées d'une lame unique; pourquoi . . . . § 310
Sixième cause : la grandeur des lames; les plus petites persistent en général le plus longtemps; expériences. . . . . § 311
Septième cause : la nature du solide auquel adhère une lame, et l'état de la surface de ce solide; faits à l'appui . . . . . . § 312
Ensemble des conditions de la plus grande persistance . . . . § 313
Essais tentés pour obtenir des figures laminaires indéfiniment persistantes ou d'une très-grande durée; réussite approchée avec un mélange fondu de colophane et de gutta-percha. . . . . . § 314
Historique concernant les lames liquides. Les anciens connaissaient les bulles laminaires complètes obtenues par insufflation . . . § 315
Vapeur vésiculaire. . . . . § 316
Boyle : il paraît avoir appelé le premier l'attention sur les couleurs des lames liquides . . . . § 317
Hooke : idées singulières sur les taches noires des bulles. . . . § 318
Newton : emploi de la mousse pour une expérience sur la recomposition de la lumière; emploi des calottes laminaires dans ses recherches sur les couleurs des lames minces. . . . . § 319
Gray : il constate qu'une bulle de savon soumise à l'influence électrique attire les corps légers . . . . § 320
Leidenfrost : étude détaillée et curieuse des bulles de savon. Ces bulles sont solides et non liquides; leur élasticité, leur grande persistance en vase clos; influence de leur grosseur sur leur durée; force contractile, son siége; force explosive, son siége; constitution de la lame; siége des couleurs; lames planes; les taches noires des bulles sont nettement terminées à leurs bords; conséquence; mesure de l'épaisseur de la lame; limite supérieure des diamètres d'une molécule d'eau et d'une molécule d'huile; pores de grandeur notable dans les bulles; l'air atmosphérique est un assemblage de petites lamelles aqueuses; les animaux et les végétaux sont formés de petites bulles de savon et de petits tubes de la même matière . . . . § 321
Wilke : effet d'une température très-basse sur les bulles de savon . § 322
Cavallo : bulles de savon gonflées avec de l'hydrogène. . . . . § 322bis
Belli : lame liquide dans la concavité d'un jet lancé obliquement de bas en haut . . . . § 322ter
Morey : bulles de résine solidifiées; on en obtient en général un

plus ou moins grand nombre à la suite les unes des autres, unies entre elles par des effilements . . . . § 323
Fusinieri : étude détaillée des phénomènes de coloration et de mouvement dans les lames liquides; grandes lames planes d'eau de savon; lames planes du même liquide entièrement noires; petites lames d'autres liquides, soit sous forme de calottes, soit planes dans des cadres métalliques, particularités qu'elles présentent; dans une lame cunéiforme, une force répulsive, qui ne peut naître que d'un développement de calorique, chasse les molécules liquides vers l'arête du coin, et cela avec d'autant plus d'énergie que le coin est moins aigu; de là l'explication de l'inversion des teintes dans certaines calottes; explication des têtards et de leur mouvement ascensionnel; explication de la disparition instantanée des lames qui se brisent; phénomènes curieux que présente une lame d'eau de savon verticale et de peu de hauteur, placée en vase clos . . . . § 324
Pfaff : effet de la congélation sur des lames planes horizontales d'eau de savon réalisées en vase clos; grande persistance de ces lames. . . . . § 325
Dr Hough : voir au § 149. Il signale la petite masse qui garnit le bas des calottes laminaires, et constate que ces calottes manifestent les attractions et répulsions des corps légers flottants.
Savart : voir aux §§ 230 et 232 . . . . § 326
Frankenheim : opinion singulière sur le développement des lames liquides.
Le François : voir au § 239.
Dr Reade : voir au § 307. . . . . § 327
M. Draper : endosmose de certains gaz à travers les lames d'eau de savon.
Dr Reade : voir au § 307. Les couleurs des lames ne sont pas dues à des différences d'épaisseur . . . . § 328
Brewster : lames liquides observées à l'aide de la lumière polarisée.
M. Böttger : voir au § 314 . . . . § 328bis
Marianini : bulle flottant sur le gaz acide carbonique; phénomène d'endosmose. § 329
M. Henry : voir aux §§ 116, 118 et 151. Mesure, par les bulles, de la cohésion de l'eau de savon; valeur élevée de la cohésion de l'eau. § 330
M. Melsens : bulles laminaires de mercure. Théorie de leur génération.
M. Hagen : voir au § 153. . . . . § 331
M. Eisenlohr : grands anneaux colorés obtenus par la rotation rapide d'une lame horizontale. Hypothèse sur la limitation brusque de l'espace noir dans une lame d'eau de savon.
M. Tyndall : voir au § 230 . . . . § 332
Magnus : voir au § 234. Ses recherches sur les disques liquides de Savart.
M. De Tessan : voir au § 118 . . . . § 333

M. Gladstone : voir au § 242. La mousse produite sur un liquide coloré est toujours d'une teinte plus claire, et, dans certains cas, tout autre que celle du liquide lui-même. . . . . . . § 334
M. Tyndall : sensation de chaleur sur la main plongée dans l'écume de la mer. § 335
M. Van der Willigen : hypothèse sur la constitution des lames d'eau de savon . . . . § 336
Sir W. Thomson : voir au § 156. Lorsqu'une lame liquide se développe, elle se refroidit, bien que d'une quantité extrêmement petite . . . . § 337
M. Graham : explication des faits d'endosmose apparente que présentent les lames liquides . . . . § 338
M. Faye : production de petites sphères laminaires d'eau de savon pleines d'huile et nageant dans ce dernier liquide.
M. Van Rees : voir aux §§ 202 et 203 . . . . § 339
M. Florimond : voir au § 312. Influence du diamètre de l'orifice sur celui des bulles.
MM. Minary et Sire : Voir au § 237 . . . . § 340
M. Mach : voir au § 314. Interprétation erronée; mesure de l'épaisseur de petites lames de colophane, et d'autres obtenues avec une solution d'un silicate alcalin . . . . § 341
M. Kaul : essai d'une théorie des systèmes laminaires des charpentes.
M. Félix Plateau : voir au § 235 . . . . § 342
M. Sire : expériences curieuses sur la pression des bulles.
M. Van der Mensbrugghe : voir au § 235 . . . . § 343
M. Laroque : veine laminaire résultant d'un mouvement de rotation imprimé au liquide du vase.
M. Lamarle : voir aux §§ 204 et 210.
M. Marangoni : voir au § 160bis pour une expérience sur une lame d'eau de savon . . . . § 344
M. Tait : voir au § 118; de quelle manière une bulle se détache d'un orifice; réunion de deux bulles en une seule, et fractionnement d'une bulle en deux ou plusieurs autres; projection agrandie sur un écran des couleurs d'une bulle; bandes d'interférence de Wrede obtenues au moyen de l'image du soleil réfléchie par une bulle . § 345
M. Broughton : examen, à l'aide du microscope, de la tache noire du sommet d'une bulle; procédé particulier pour la mesure de l'épaisseur moyenne de la lame qui constitue une bulle. . . . § 346
Dupré : voir au § 161. Expérience curieuse.
M. Van der Mensbrugghe : voir aux §§ 139 et 162 . . . . . . § 347
M. Böttger : grosses bulles d'une décoction de bois de Panama, par l'emploi d'un très-large orifice . . . . § 348
Brewster : étude détaillée des couleurs des lames; lame plane verticale dont on fait tourner le contour solide; effets du souffle sur les couleurs d'une lame horizontale ; hypothèse sur l'origine des couleurs des lames; voir aux §§ 187 et 206. Mouvement des

lames dans les tubes coniques ; phénomènes observés sur de petites lames verticales de différents liquides . . . . § 349
M. Chautard : emploi des bulles pour constater le magnétisme de l'oxygène. . . . . § 350
M. Tait : démonstration, par les bulles, d'un théorème de mathématiques pures . . . . § 351
M. Cauderay : emploi des bulles pour manifester les attractions et répulsions électriques . . . . § 352
M. L. Dufour : moyen d'étudier la constitution des flammes en coupant celles-ci par une nappe d'eau mince et horizontale . . . § 353
M. Boussinesq : calcul des lignes méridiennes des lames du § 230.
M.M. Quincke, Lüdtge et Van der Mensbrugghe : voir aux §§ 165 à 168 . . . . § 354
M. Kessler : procédé simple pour l'expérience de la bulle de savon flottant sur le gaz acide carbonique . . . . § 354bis
Pourquoi je n'ai parlé qu'incidemment des lames minces résultant de l'extension d'un liquide sur un autre. . . . . § 355
Examen de l'opinion qu'il se produit, dans les lames d'eau de savon, une séparation de l'un des ingrédients du liquide . . . . . . § 356

CHAPITRE IX.

Stabilité des figures d'équilibre ; étude purement expérimentale.

Les figures d'équilibre ont, pour la plupart, des limites de stabilité ; la sphère est une figure stable dans son état complet, et, à plus forte raison, toute portion de sphère est stable . . . . § 357
Le plan n'a pas non plus de limites de stabilité. . . . . § 358
Recherche approximative, par l'expérience, avec une masse d'huile dans le mélange alcoolique, de la limite de stabilité du cylindre, celui-ci étant terminé par des bases circulaires ; à cette limite, le rapport entre la longueur et le diamètre est compris entre les nombres 3 et 3,6 . . . . § 359
Recherche grossière de la même limite au moyen d'un cylindre de mercure de petit diamètre réalisé dans l'air . . . . § 360
Emploi d'un cylindre de cette nature pour reconnaître quel est le résultat de la transformation spontanée quand la longueur est considérable relativement au diamètre ; le cylindre alors se convertit en une série de sphères isolées . . . . § 361
Phases successives par lesquelles passe cette transformation. . . § 362
Description détaillée de l'appareil et des opérations du § 361 . . . § 363
La transformation régulière d'un cylindre très-long terminé à des bases solides, peut se disposer, relativement aux masses qui, après le phénomène, demeurent adhérentes aux bases, suivant deux modes différents . . . . § 364

Je nomme *divisions* d'un cylindre, les portions de celui-ci dont chacune fournit une sphère ; calcul de la longueur d'une division d'après le résultat de la transformation ; ce que j'entends par la longueur normale des divisions . . . . § 365

Résultat de l'expérience du § 361 avec des cylindres de $1^{mm},05$ de diamètre et de 90^{mm} et 100^{mm} de longueur ; discussion; valeur de la longueur d'une division dans la transformation régulière de ces cylindres . . . . § 366

Autres exemples de la transformation d'un long cylindre ; procédé proposé par M. Donny ; pourquoi les fils de verre, les fils d'araignée, etc. peuvent se former . . . . § 367

Le phénomène de la transformation en sphères isolées n'appartient pas exclusivement au cylindre : il se produit à l'égard de toute figure dont une dimension est considérable relativement aux deux autres; expérience . . . . § 368

Toutes choses égales d'ailleurs, la longueur normale des divisions d'un cylindre est proportionnelle au diamètre de celui-ci ; preuve expérimentale avec un cylindre de mercure double en diamètre de ceux du § 366. § 369

Expérience qui montre que le rapport entre la longueur normale des divisions et le diamètre du cylindre augmente quand des résistances extérieures gênent la transformation . . . . § 370

Le rapport entre la longueur des divisions et le diamètre du cylindre ne peut être inférieur à celui qui représente la limite de la stabilité. § 371

La viscosité intérieure doit, comme les résistances extérieures, augmenter le rapport entre la longueur des divisions et le diamètre du cylindre, mais son action est sans doute faible ; il en est de même de la viscosité superficielle quand elle est à excès positif . . . . § 372

En l'absence complète de toute résistance, le rapport serait très-probablement égal à la limite même de la stabilité ; on peut adopter, en moyenne, le nombre 4 comme valeur approximative de ce rapport dans les différents liquides . . . . § 373

Tant que la longueur d'un cylindre demeure comprise entre une fois et une fois et demie celle qui correspondrait à la limite de la stabilité, la transformation ne peut s'effectuer que par un seul renflement et un seul étranglement . . . . § 374

A la fin de la transformation d'un cylindre, les masses, avant de se séparer, restent unies deux à deux par un filet sensiblement cylindrique, lequel se transforme à son tour en donnant lieu à des sphérules ; sauf de rares exceptions, de semblables filets se produisent toutes les fois qu'une masse liquide, quelle que soit sa figure, se divise en masses partielles; exemple . . . . § 375

Théorie de la génération de ces filets . . . . § 376

Le phénomène a lieu aussi bien dans les figures laminaires que dans les figures pleines . . . . § 377

Extension, au cas des figures laminaires, de la théorie du § 376 . . § 378
Recherche de la loi suivant laquelle, toutes choses égales d'ailleurs, la durée de la transformation d'un long cylindre varie avec le diamètre de celui-ci ; mode d'expérience; remarques. . . . . § 379
Détails de l'expérience ; elle conduit à la conclusion que la durée de la transformation comptée jusqu'à l'instant de la rupture des filets, est exactement ou sensiblement proportionnelle au diamètre du cylindre . . . . § 380
Quant à la valeur absolue de cette durée pour un liquide et un diamètre donnés, l'expérience du § précédent ne fournit, à l'égard de l'huile, qu'une limite supérieure fort éloignée . . . . . . § 381
Expérience avec le long cylindre de mercure du § 369; elle donne, pour ce liquide, une limite inférieure . . . . § 382
Le filet auquel donne lieu un étranglement quand une figure quelconque va se désunir, est d'autant moins mince, et conséquemment fournit des sphérules d'autant plus grosses, que l'étranglement est plus allongé. . . . . § 383
Récapitulation des faits et des lois concernant les cylindres instables . . . . § 384
Recherche expérimentale du rapport entre la hauteur limite du caténoïde et le diamètre des bases, au moyen d'une masse d'huile pleine dans le liquide alcoolique; particularités de l'expérience . § 385
Discussion; on en conclut que le rapport cherché est, à fort peu près, égal à $\frac{2}{3}$ . . . . § 386
Pourquoi un caténoïde limite plein est permanent, bien qu'on doive le considérer comme étant à sa limite de stabilité . . . . . . § 387
Dans l'onduloïde partiel dont le milieu est occupé par un étranglement, la limite de stabilité ne peut s'énoncer d'une manière générale; pour le cas où le milieu de la figure est occupé par un renflement, voir au § 52. . . . . § 388
Dans le nodoïde partiel engendré par une portion du nœud de la ligne méridienne, la limite de la stabilité ne peut s'énoncer d'une manière générale . . . . § 389
Il en est de même à l'égard du nodoïde partiel engendré par un arc convexe vers l'extérieur ; on trouve seulement, dans ce cas, que la limite est en deçà des circonférences où les éléments sont perpendiculaires à l'axe . . . . § 390
Dans ce cas aussi, comme dans celui du caténoïde limite plein, la figure, à sa limite de stabilité, est parfaitement permanente; explication . . . . § 391
Si, au lieu de terminer un caténoïde par deux bases circulaires égales, on prend pour l'une des bases le cercle de gorge, le caténoïde n'a plus de limite de stabilité; démonstration ; vérification expérimentale . . . . § 392
Les figures d'équilibre qui ne sont pas de révolution ont aussi, pour la plupart sans doute, leurs limites de stabilité ; exemples.

L'héliçoïde gauche à plan directeur formé à l'état laminaire, dans une charpente du système décrit au § 130, n'a pas de limites de stabilité . . . . § 393

CHAPITRE X.

Stabilité des figures d'équilibre; étude théorique et vérifications expérimentales.

M. Hagen a cherché, par une méthode théorique approximative, la limite de stabilité du cylindre . . . . § 394

Imperfection de cette méthode . . . . § 395

Principe servant de base à une méthode rigoureuse . . . . . . § 396

Application du calcul à ce principe : on trouve ainsi qu'à la limite exacte, le rapport entre la longueur et le diamètre du cylindre est la quantité π, c'est-à-dire le rapport de la circonférence au diamètre . . . . § 397

Beer est arrivé à la même valeur, mais sa démonstration est incomplète . . . . § 398

Marche à suivre pour vérifier expérimentalement cette valeur au moyen de cylindres d'huile dans le liquide alcoolique. . . . . § 399

Appareil et expériences. . . . . § 400

Discussion de ces expériences; elles donnent, pour valeur très-approchée de la limite, le nombre 3,15 . . . . § 401

Particularité en apparence singulière ; explication . . . . . . § 402

Les expériences du § 400 vérifient le principe du § 396 . . . . . § 403

Dans un cylindre à sa limite de stabilité, la transformation s'effectue comme si elle avait pour origine un onduloïde infiniment peu différent de ce cylindre, et composé d'un seul renflement et d'un seul étranglement. . . . . § 404

Dans un cylindre indéfini, entièrement libre, et formé d'un liquide exempt de toute viscosité, la transformation s'effectuerait très-probablement comme si elle partait d'un onduloïde indéfini différant infiniment peu de ce cylindre . . . . § 405

Le calcul montre pourquoi les résistances allongent les renflements et les étranglements . . . . § 406

Preuve expérimentale que les forces qui produisent la transformation augmentent avec la longueur des renflements et des étranglements . . . . § 407

Le calcul du § 403 fournit une deuxième démonstration de la limite exacte de la stabilité du cylindre. . . . . § 408

Un onduloïde partiel dont le milieu est occupé par un renflement, est exactement à sa limite de stabilité quand il est terminé aux cercles de gorge de deux étranglements adjacents à ce renflement; démonstration. . . . . § 409

Troisième méthode rigoureuse d'arriver à la valeur précise de la limite de stabilité du cylindre . . . . § 410
Vérification expérimentale, au moyen d'un caténoïde laminaire, de la limite de stabilité de cette figure . . . . § 411
Les principes rigoureux que nous avons appliqués à la recherche des limites de stabilité du cylindre et de l'onduloïde partiel renflé, ne peuvent être employés à l'égard du nodoïde . . . . § 412
Stabilité des figures d'équilibre envisagée sous un point de vue général, en partant du fait de la tension. Dans une figure instable, la surface n'est minima que par rapport à certains modes de petite déformation, tandis qu'elle est maxima par rapport à d'autres . . . . § 413
Confirmation de ce principe par l'étude du cylindre : la surface de celui-ci est un minimum par rapport à toutes les petites déformations qui n'altèrent pas les aires des sections parallèles aux bases . . . . § 414
Application du calcul au cas où la petite déformation partage la figure en portions de même longueur alternativement renflées et étranglées; quand la somme des longueurs d'un renflement et d'un étranglement excède la circonférence du cylindre originaire, la surface de la figure déformée est moindre que celle de ce cylindre . . . . § 415
On en déduit la conséquence qu'il y a plusieurs petites déformations à l'égard desquelles la surface d'un long cylindre est un maximum. § 416
Conséquences du calcul du § 415 à l'égard d'un cylindre instable assez court pour qu'il ne s'y forme qu'un seul renflement et un seul étranglement . . . . § 417
Résumé de la discussion précédente; extension aux figures d'équilibre autres que le cylindre; restriction du principe admis par les géomètres à l'égard des surfaces à courbure moyenne constante. § 418
Point de départ de l'application du calcul au problème général. Pourquoi la sphère et le plan sont stables . . . . § 419
Dans une figure d'équilibre instable, il y a une condition théorique qui détermine le choix de cette figure parmi toutes les petites déformations qui diminueraient la surface; le mode qu'adopte la figure n'est pas celui qui rendrait cette diminution la plus grande . . . . § 420
Quelle est probablement la vraie condition théorique . . . . . § 421
Application au cylindre. . . . . § 422
Suite; opinion de Beer . . . . § 423
Limites de stabilité dans des cas où la pesanteur joue un rôle : résumé d'un travail de M. Duprez . . . . § 424

CHAPITRE XI.

Applications des propriétés des cylindres liquides instables, ou, plus généralement, des figures liquides dont une dimension est considérable relativement aux deux autres : théorie de la formation des gouttes au bord de certaines lames; théorie de l'explosion des bulles; théorie de la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires.

Opinion de Magnus sur la cause de la génération des gouttes au bord des disques liquides de Savart; réfutation . . . . § 425

Théorie de cette génération; comparaison avec les faits observés; expérience . . . . § 426

Toutes les fois qu'une lame présente un bord libre, il se forme à ce bord un bourrelet, lequel se convertit en masses isolées . . . . § 427

Théorie de l'explosion des bulles . . . . § 428

Confirmation expérimentale . . . . § 429

M. Van der Mensbrugghe : explication, par le principe de la transformation des figures allongées, d'un fait qui se manifeste dans certains cas d'étalement d'un liquide sur un autre. . . . . . § 430

Théorie de la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires : une semblable veine s'écoulant verticalement de haut en bas, tend à constituer une sorte de cylindre très-allongé; la transformation doit conséquemment s'y produire, et les divisions doivent passer graduellement, pendant leur descente, à l'état de masses isolées; de là la constitution de la veine, telle qu'elle a été étudiée par Savart . . . . § 431

Explication de l'aspect que présente, à la simple vue, une veine soustraite à toute influence étrangère . . . . § 432

La longueur de la partie continue de la veine doit croître avec la charge et avec le diamètre de l'orifice; lois de Savart . . . . . § 433

Avec des charges suffisamment fortes, la première de ces lois doit être sensiblement satisfaite. . . . . § 434

Démonstration plus rigoureuse . . . . § 435

Sous une charge suffisante, la seconde des lois de Savart doit également être satisfaite . . . . § 436

Sous des charges assez faibles, deux influences opposées agissent sur la loi suivant laquelle la longueur de la partie continue varie avec la charge . . . . § 437

A cause de la neutralisation partielle de ces deux influences, la première loi de Savart doit commencer à se vérifier à partir d'une charge fort inférieure à celles indiquées au § 434; cette charge est d'autant plus faible que l'orifice est plus petit. . . . . § 438

La seconde loi de Savart doit commencer à se manifester lorsqu'on donne à la charge commune la valeur pour laquelle la veine sortant par le plus grand des orifices commence à se trouver dans les conditions effectives de la première loi. . . . . § 439

Les observations de Savart sur des veines d'eau soustraites à toute action étrangère vérifient les conclusions des deux §§ précédents . § 440
Les observations du même savant relatives à des veines d'eau laissées sous l'influence des actions étrangères, vérifient aussi les mêmes conclusions . . . . § 441
Lois de Savart concernant les sons rendus par les veines ; sous des charges suffisamment fortes, ces lois doivent être satisfaites . . § 442
Vérification, au moyen des expériences de Savart, d'un résultat énoncé au § 373 . . . . § 443
Toutes choses égales d'ailleurs, la longueur de la partie continue doit varier avec la nature du liquide; observations de Savart . . § 444
Extension de ma théorie aux veines lancées dans des directions autres que la verticale descendante . . . . § 445
Constitution singulière du bourrelet qui garnit le bord supérieur de la lame du § 239. § 446
Hypothèse proposée par Savart pour expliquer la constitution des veines . . . . § 447
Théorie de l'action des mouvements vibratoires sur la veine. Résumé des faits observés par Savart . . . . § 448
La durée de chacune des vibrations correspondantes au son propre à la veine est égale à celle du passage d'un étranglement ou d'un renflement à la section contractée . . . . § 449
Quand des vibrations de même période que celles du son propre à la veine sont communiquées au vase, elles concourent avec les forces moléculaires qui produisent la transformation spontanée, de sorte que chaque division quitte la section contractée dans une phase plus avancée de sa transformation . . . . § 450
En outre, la vitesse de cette transformation est accrue par un effet d'inertie . . . . § 451
Remarques sur la direction des vibrations à l'orifice, et sur l'établissement de la coïncidence entre l'action des vibrations et celle des forces figuratrices . . . . § 452
Les principes des §§ 450 et 451 expliquent le raccourcissement de la partie continue, l'augmentation apparente de l'épaisseur de la portion limpide, et les oscillations de forme qu'exécutent les masses isolées . . . . § 453
Pourquoi la longueur et le diamètre des ventres ainsi que le diamètre des nœuds augmentent avec la charge et avec le diamètre de l'orifice. . . . . § 454
Explication des apparences que présente la veine lorsqu'elle n'est point sous l'influence d'un instrument sonore, et qu'elle est reçue dans un vase sans précautions particulières . . . . § 455
Idem des effets produits sur une veine tombant encore librement dans le liquide du vase inférieur, par un son excité près d'elle et à l'unisson de celui qui lui est propre . . . . § 456
Examen des effets que doivent produire les sons qui s'écartent de l'unisson. Cas d'un son très-voisin de l'unisson . . . . § 457

Cas des sons qui s'écartent davantage de l'unisson. . . . . . . § 458
Indications de Savart . . . . § 459
Cas où la partie discontinue de la veine tombe sur un corps qui ne peut rendre qu'un son déterminé . . . . § 460
Suite de ce cas . . . . § 461
Influence de l'unisson lorsque l'instrument sonore est mis en contact avec les parois du vase . . . . § 462
Aspect produit, dans cette circonstance, par le passage des sphérules principales. Difficulté apparente . . . . § 463
Aspect produit par les très-petites sphérules. . . . . § 464
Cas où l'instrument, en contact avec les parois du vase, rend un son différent de l'unisson . . . . § 465
Suite de ce cas. . . . . § 466
Difficulté apparente . . . . § 467
Pourquoi les sons exercent une influence analogue sur les veines lancées dans des directions autres que la verticale descendante . § 468
Explication de la gerbe signalée par Savart dans les veines lancées sous certaines obliquités . . . . § 469
Explication de la disparition de la gerbe sous l'influence du son principal . . . . § 470
Recherche expérimentale des rapports entre le son principal et ceux qui réduisent la gerbe à deux ou à trois jets distincts . . . . § 471
Théorie de ces phénomènes . . . . § 472
Pourquoi, dans les expériences du § 471, au-dessus du son principal et entre celui-ci et son octave grave, aucun son, à l'exception de ceux qui avoisinaient ces deux derniers, n'a modifié la gerbe . . § 473
Essai d'explication du fait signalé par Savart que le son principal baisse à mesure que la direction initiale du jet s'éloigne davantage de la verticale descendante . . . . § 474

CHAPITRE XII.

Historique de la constitution des veines liquides. — Action de l'électricité sur des veines de petit diamètre. — Veines laminaires. — Constitution d'un courant gazeux qui traverse un liquide.

Historique de la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires.
Mariotte : premier aperçu de cette constitution, dans le cas de charges très-faibles. — Savart : étude expérimentale détaillée dans le cas de charges quelconques . . . . § 475
Effet de l'influence électrique sur un jet d'eau de très-petit diamètre. § 476
M. Colladon : faisceau de lumière emprisonné dans une veine liquide courbe . . . . § 476 bis
M. von Feilitzsch : considérations sur la résolution de la veine en masses isolées. § 476 ter

Matteucci : nouveau procédé pour l'observation de la veine . . . § 477
M. Weisbach : veine lancée sous une charge énorme . . . . . § 477bis
M. Hagen : on ne peut attribuer la résolution de la veine en masses isolées à ce que les molécules de l'intérieur n'ont pas le temps d'arriver à la surface pour satisfaire à l'augmentation progressive de celle-ci. Deux procédés nouveaux pour l'observation de la veine ; dans les veines soumises à cet examen, les masses successives ne différaient pas considérablement en diamètre. Expériences dont les résultats ne se sont pas accordés avec l'une des lois de Savart. . . . . § 478
M. Billet-Sélis : deux procédés nouveaux pour l'observation de la veine . . . . § 479
M. Tyndall : nouveau procédé. Opinion singulière . . . . . . § 480
M. Buff : nouvelles observations ; expériences dont les résultats lui paraissent ne pas s'accorder avec ma théorie ; son opinion sur la cause de la résolution de la veine en masses isolées . . . . . § 481
M. Dejean : idées particulières sur la nature des liquides, et application de ces idées à la constitution de la veine . . . . . . § 482
Magnus : torsion de la veine par suite d'un mouvement spontané de rotation du liquide du vase ; moyen d'écarter cet inconvénient. Effet d'un ébranlement subit dans le voisinage de la veine. Hypothèse du déchirement produit par l'accélération de la vitesse. Introduction de l'air dans la veine par suite d'un mouvement de rotation du liquide du vase . . . . § 483
M. Buff : phénomène curieux que présentent deux veines sortant d'orifices rapprochés . . . . § 484
M. Maus : doutes à l'égard de ma théorie. Hypothèse particulière sur la cause des pulsations supposées par Savart ; la conversion en masses isolées résulte du déchirement dû à l'accélération de la vitesse. . . . . § 485
M. Fuchs : hypothèse relative à l'influence de l'électricité sur un jet d'eau de très-petit diamètre ; objections ; autre hypothèse, et expériences à l'appui . . . . § 486
Magnus : sous des charges très-faibles, la veine est influencée par tous les sons produits dans son voisinage, à l'exception des sons très-aigus ; l'action des sons résulte surtout des vibrations du fond du vase ; expérience. Nouveaux procédés pour l'observation de la veine. Même dans une veine soustraite à toute action étrangère, les masses isolées exécutent des oscillations de forme. Effet produit par les sons sur les veines sortant d'orifices très-petits. Observations sur un écoulement goutte à goutte. Effet curieux de l'attraction électrique exercée sur une veine à ventres parfaitement réguliers. Observation sur les veines ascendantes ; la gerbe est due à des vibrations transversales de l'orifice ; la réduction de la gerbe à deux ou à trois jets résulte de la même cause ; dans ces jets distincts, les masses isolées ont un arrangement symétrique . . . . § 487

M. Reitlinger : modification à la seconde hypothèse de M. Fuchs relative à l'influence de l'électricité sur un jet d'eau de petit diamètre ; expériences à l'appui . . . . § 488
Le P. Lacouture : faits curieux que présente une veine d'eau animée d'une très-faible vitesse, et reçue à peu de distance de l'orifice sur un plan résistant.
Belli : observation analogue. . . . . § 489
M. Tyndall : effet exercé sur la gerbe par l'ensemble de deux diapasons produisant des battements . . . . § 490
M. Rodwell : expérience relative à la génération des filets et à leur conversion en petites masses dans la partie discontinue des veines. . . . . § 491
M. Buff : l'une des causes qui diminue la hauteur des jets liquides, est une pression capillaire qui s'exerce à l'extrémité de la partie continue chaque fois qu'une masse vient de s'en détacher . . . § 492
Résumé relatif à l'historique précédent; remarques . . . . . § 493
Le phénomène étudié par M. Fuchs et par M. Reitlinger n'est pas dû à une diminution de la tension de la surface du jet. Comment l'idée émise par ces physiciens peut rendre raison de toutes les particularités qu'ils ont observées . . . . § 494
Discussion comparative des théories proposées par Magnus et par moi à l'égard des jets obliquement ascendants . . . . . . § 495
Remarques sur la question des veines laminaires . . . . . . § 496
Essais infructueux de réalisation d'une veine laminaire . . . . § 497
On réussit en imprimant au liquide du vase un mouvement de rotation; formes que prend la veine suivant la vitesse de ce mouvement . . . . § 498
Explication de ces formes . . . . § 499
On obtient, sans mouvement de rotation, une veine laminaire qui se résout en bulles, en insufflant de l'air à l'intérieur ; il est très-probable qu'on ne pourrait arriver au même résultat par une forte augmentation de la charge. . . . . § 500
Explication de la file de petites bulles dont parle Morey . . . . § 501
En l'absence des forces figuratrices, la forme d'un courant gazeux sortant d'un orifice circulaire et traversant de bas en haut un liquide, serait analogue à celle de la partie lisse d'une veine liquide pleine lancée verticalement de haut en bas par un semblable orifice. § 502
Mais, à cause de l'action des forces figuratrices, le courant gazeux ne peut, à moins d'une vitesse énorme, présenter de partie continue notable . . . . § 503
Expériences qui vérifient cette déduction : les bulles isolées se forment très-près de l'orifice, et il ne se produit ni filet ni sphérules. . . . . § 504
Pourquoi, lorsque le liquide qui fournit une veine est animé d'un mouvement modéré de rotation, l'air qui s'introduit dans cette veine ne s'y divise pas en bulles . . . . § 505

Explication du glouglou qui se produit lorsqu'on incline un flacon plein de liquide pour en faire sortir celui-ci . . . . § 506
Remerciements aux personnes qui ont bien voulu me prêter leur concours . . . . § 507
Titres des Notes et Mémoires ayant trait au sujet de l'ouvrage et publiés depuis le commencement de 1870 . . . . § 508

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

LISTE ALPHABÉTIQUE

DES

AUTEURS CITÉS DANS L'OUVRAGE.

Les nombres indiquent les paragraphes.

Artur, 287.
Bède, 116, 117, 291.
Beer, 84 à 87, 398, 413, 423.
Beetz, 508.
Belli, 322ter, 489.
Berthoud, 315.
Billet-Sélis, 479.
Biot, 475 (deuxième note).
Björling, 134.
Bois-Reymond (du), 508.
Bonnet, 135.
Bosscha, 508.
Böttger, 107, 245, 311, 314, 348.
Boussinesq, 354.
Boyle, 3 (note), 6 (note), 317.
Brewster, 187, 206, 328bis, 349, 356.
Broughton, 346.
Buff, 481, 484, 492.
Catalan, 129, 137.
Cauderay, 352.
Cavallo, 322bis, 475 (deuxième note).
Chautard, 350.
Colladon, 476bis.
Coulomb, 274 (note).
Dejean, 482.
Delaunay, 82, 83.
Descartes, 283.
D'henry, 93, 94.
Donny, 8, 98, 211, 367.
Draper, 328.
Duclaux, 508.
Dufour, 93, 353.
Dupré, 127, 161, 164, 170, 211, 258, 299, 347.
Dupré, fils, 164.
Duprez, 8, 424.
Dutrochet, 167.
Eisenlohr, 332.
Enneper, 140bis, 143bis.
Faraday, 331.
Faye, 339.
Feilitzsch (von), 476ter.
Florimond, 312, 340.
Frankenheim, 117, 327.
Fuchs, 476, 486, 488, 494.
Fusinieri, 324.
Gernez, 508.
Gilliéron, 286.
Gladstone, 240, 242, 334.
Goldschmidt, 80.
Graham, 338.
Gray, 320.
Hachette, 436 (note).

Hagen, 152, 153, 233, 288, 394, 408, 426, 478.
Halley, 316.
Henry, 116, 118, 151, 171, 211, 330, 428.
Hooke, 318.
Hough, 118, 149, 326.
Jamin, 289, 291.
Jellett, 34.
Kaul, 342.
Kekule, 507.
Kessler, 354bis.
Laborde, 508.
Lacouture, 489.
Lamarle, 8, 82, 83, 88 (deuxième note), 129, 131, 132, 158, 160, 162 171, 204, 210, 212, 390, 395.
Langberg, 156bis.
Laplace, 1, 20, 148, 171.
Laroque, 344, 483, 496, 505.
Le François, 239.
Leidenfrost, 147, 321, 356.
Lindelöf, 81, 82, 89, 91, 392, 409.
Link, 285.
Lissajous, 508.
Logeman, 486.
Lüdtge, 166, 167, 508.
Luvini, 162bis, 508.
Mach, 210bis, 314, 341, 508.
Magnus, 234, 238, 333, 425, 480, 481, 483, 487, 495, 505.
Maistre (de), 123, 286.
Mannheim, 88.
Marangoni, 160bis, 288bis, 429 (note), 508.
Marianini, 329.
Mariotte, 475.
Mathet, 140.
Matteucci, 94, 477.
Maus, 485.
Mellberg, 508.
Melsens, 331.
Mensbrugghe (van der), 8, 139, 143, 162, 167, 168, 178, 235, 256, 258, 271, 299 (première note), 307, 324, 355, 430, 494, 508.
Meunier, 290.
Meusnier, 129, 133.
Mile, 150.
Minary, 237.
Moigno, 81.
Monge, 133, 147.
Morey, 314, 323, 501.
Mossotti, 150bis.
Mousson, 508.
Moutier, 508.
Nägeli, 289, 291.
Newton, 319, 356.
Norris, 508.
Petit, 284,
Pfaff, 325, 356.
Pichard, 286.
Plateau (F.), 8, 172, 235, 367, 446.
Plateau (J.), 508.
Poisson, 1, 79, 150bis, 171.
Popow, 508.
Prechtl, 286.
Quincke, 127, 163, 165, 169, 341, 508.
Reade, 307, 313, 328.
Rees (van), 202, 203.
Reitlinger, 488, 494.
Riemann, 142.
Rodwell, 491.
Rottier, 103, 104, 314, 507.
Rumford, 284, 286.
Saussure, 316.
Savart, 153, 230 à 233, 240, 354, 426, 431 à 434, 436, 438 à 445, 447, 448, 452, 455 à 461, 463 à 469, 471, 473, 474, 475, 477bis, 478.
Scherk, 133, 135, 137, 138, 139, 143bis.
Schondorff, 143.
Schwarz, 138 (note), 141, 143, 143bis, 314, 393, 508.
Segner, 3 (note), 146.
Serret, 136.
Sire, 237, 343.
Stefanelli, 429 (note), 508.
Steiner, 88 (deuxième note).
Tait, 118, 345, 351, 383.
Tessan (de), 118.

Thomson (J.), 155.
Thomson (W.), 156, 337, 508.
Tomlinson, 430, 508.
Tyndall, 230, 335, 480, 490.
Valson, 508.
Waals (van der), 508.
Weisbach, 477bis, 491.
Wertheim, 157.
Wilhelmy. 157.
Wilke, 322.
Willigen (van der), 336, 356.
Wrede, 345.
Young, 146, 148, 171.